Département GTR de Béziers
IUT de Montpellier
Université Montpellier II

Génie Télécoms & Réseaux

Génie des Télécommunications et Réseaux

Cours de mathématiques 2ème année

2000-2001

Christophe.Borelly@iutbeziers.univ-montp2.fr © 2000

Chapitre I
STATISTIQUES

1. Généralités

La principale application des calculs statistiques au niveau IUT est la méthode des moindres carrés. Pour introduire cette technique, nous allons étudier dans ce chapitre les **univers aléatoires**. Dans ces univers, chaque mesure n'est pas reproductible, les résultats d'une expérience donnée sont sensibles à de nombreuses causes différentes. Par exemple, si on mesure le nombre de collisions par seconde sur un réseau ethernet, on ne trouvera jamais la même valeur. Elle dépend du nombre de machines connectées au réseaux, du nombre de trames que chaque machine génère et de beaucoup d'autres facteurs.
Les paramètres numériques (moyenne, variance, covariance, etc…) que nous serons amenés à définir, nous permettrons de caractériser plus précisément les phénomènes aléatoires étudiés.

1.1. Définitions

Les termes employés en statistique sont empruntés au langage utilisé pour le recensement des personnes. On étudie une **population** donnée (une partie d'un univers aléatoire) et on s'intéresse à un **caractère** précis des **individus** qui la compose. Le sous-ensemble d'individus sur lequel porte les mesures s'appelle l'**échantillon**.

On peut faire :

- de l'échantillonnage **exhaustif** où l'on prend en compte le caractère d'un individu dans la population privée des individus déjà sondés (tirage sans remise).
- de l'échantillonnage **non exhaustif** où l'on prélève au hasard un individu dans la population totale à chaque fois (tirage avec remise).

On recueille pendant cet échantillonnage des données qui peuvent être classées en deux ensembles :

- les données **qualitatives** qui donnent des informations non vraiment mesurables que l'on range par catégories. Par exemple, si on étudie le **goût du beaujolais nouveau**, on peut dire qu'il est bon, qu'il pique, qu'il a goût de banane, etc…
- les données **quantitatives** qui ont une valeur numérique que l'on peut mesurer ou compter. On peut distinguer dans ce cas, les variables **discontinues** qui prennent leurs valeurs dans un ensemble fini et les variables **continues** qui appartiennent à un ensemble infini de valeurs. Par exemple, le **nombre d'appels téléphoniques par heure à un standard** est une variable discontinue, alors que **la durée de chaque appel** est une variable continue.

Dans les paragraphes suivants, nous allons nous intéresser respectivement à un caractère unique puis à deux caractères simultanément. Nous essayerons enfin de relier deux variables entre elles par une courbe de régression.

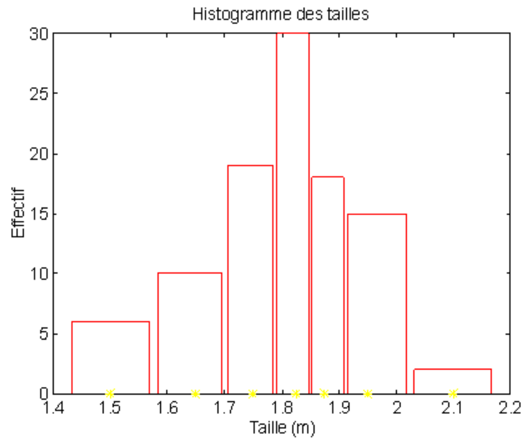
2. Statistiques à une variable

Par convention, on notera le **nom** du paramètre étudié en majuscule et une de ses **valeurs** en minuscule. Les résultats de l'échantillonnage sont réunis dans un tableau, en faisant apparaître en face de la valeur du caractère étudié X, **l'effectif** n_i que l'on a mesuré (soit le nombre de fois que ce caractère est apparut au cours de l'échantillonnage).
Il est parfois utile de rassembler les mesures en **classes**, c'est à dire de regrouper par intervalles les effectifs, pour avoir une meilleure appréciation des mesures.
Afin de pouvoir comparer des échantillons différents, on calcule souvent la **fréquence relative** qui est le rapport entre l'effectif et le nombre total de mesures N.

$$\boxed{f_i = \frac{n_i}{N} \text{ avec } N = \sum_i n_i}$$

L'exemple qui suit, montre les différentes représentations graphiques que l'on peut faire. On a relevé la taille des personnes d'un groupe de 100 étudiants. On a utilisé des intervalles de taille différentes, et on a pris le milieu de chaque classe comme valeur numérique de la taille.

Classe (début)	1,4	1,6	1,7	1,8	1,85	1,9	2	
Classe (fin)	1,6	1,7	1,8	1,85	1,9	2	2,2	
Largeur des classes (m)	0,2	0,1	0,1	0,05	0,05	0,1	0,2	
Taille des étudiants (m)	1,5	1,65	1,75	1,825	1,875	1,95	2,1	Effectif total
Effectif	6	10	19	30	18	15	2	100
Fréquence	6,00%	10,00%	19,00%	30,00%	18,00%	15,00%	2,00%	
Fréquence cumulée	6,00%	16,00%	35,00%	65,00%	83,00%	98,00%	100,00%	


Histogramme des tailles
Effectif
Taille (m)

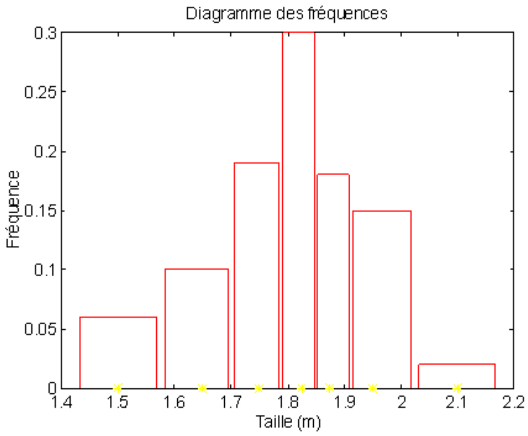


Diagramme des fréquences
Fréquence
Taille (m)

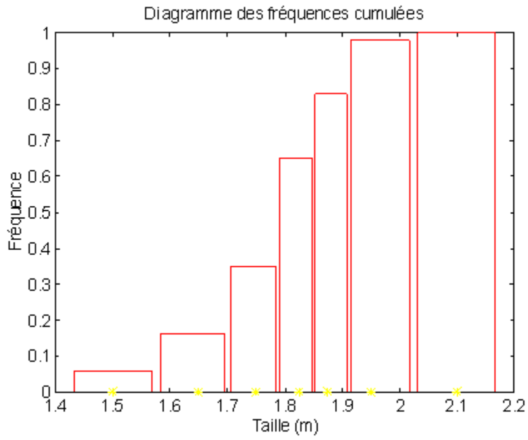


Diagramme des fréquences cumulées
Fréquence
Taille (m)

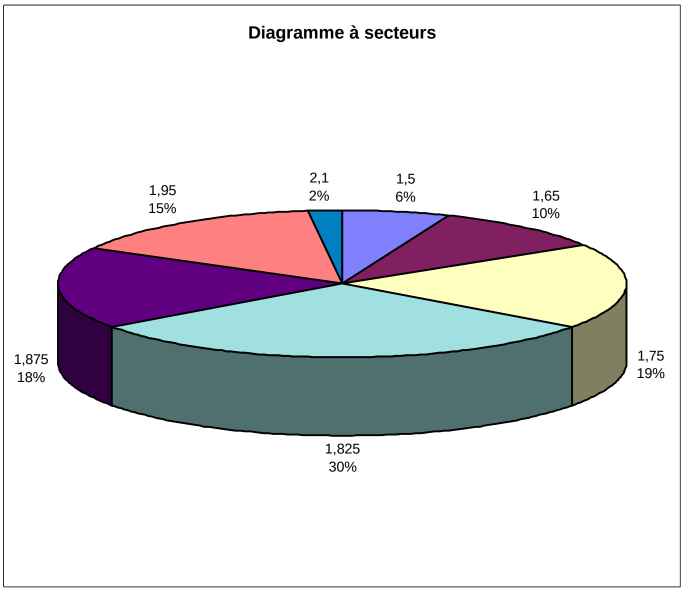


Diagramme à secteurs
1,95
15%
2,1
2%
1,5
6%
1,65
10%
1,875
18%
1,75
19%
1,825
30%

2.1. Paramètre de tendance moyenne

C'est la moyenne arithmétique des valeurs du caractère étudié.

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{X} &= \frac{1}{N}\sum_i n_i.x_i \\ \overline{X} &= \sum_i f_i.x_i\end{aligned}}$$

Pour notre exemple :

$$\overline{X} = \frac{1}{100}.(6*1{,}5+10*1{,}625+\ldots 2*2{,}1) = 1{,}807$$

On peut démontrer que :

$$\boxed{\overline{a.X+b} = a.\overline{X}+b \text{ avec } a,b \in \Re}$$

2.2. La médiane

C'est la valeur pour laquelle la fréquence cumulée est de **50 %**. Lorsque l'on a des classes, on cherche la classe médiane (la première pour laquelle la fréquence cumulée est supérieure à 50 %). En supposant que la répartition des valeurs est uniforme dans la classe, la médiane s'obtient par interpolation linéaire.
Dans notre exemple, la classe 4 est la classe médiane [1,8-1,85[.
La médiane est alors : M = 1,8 + 0,05*(0,5 - 0,35)/0,3 = 1,8250.

2.3. Le mode

C'est le caractère ou la classe de plus haut effectif. Pour l'exemple étudié, la classe modale est aussi]1,8-1,85].

2.4. Paramètre de dispersion

C'est l'écart-type σ ou la racine carrée de la variance (moyenne quadratique des écarts à la moyenne).

$$Var(X) = \frac{1}{N}\sum_i n_i.(x_i-\overline{X})^2$$

$$Var(X) = \frac{1}{N}\sum_i n_i.(x_i^2-2.x_i.\overline{X}+\overline{X}^2)$$

$$Var(X) = \frac{1}{N}\sum_i n_i.x_i^2 - \frac{2.\overline{X}}{N}\sum_i x_i + \frac{\overline{X}^2}{N}.\sum_i 1 = \frac{1}{N}\sum_i n_i.x_i^2 - 2.\overline{X}^2+\overline{X}^2$$

$$Var(X) = \frac{1}{N}\sum_i n_i.x_i^2 - \overline{X}^2 = \sum_i f_i.x_i^2 - \overline{X}^2$$

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

Pour notre exemple :

$$Var(X) = \frac{1}{100}.(6*1{,}5^2+10*1{,}625^2+\ldots 2*2{,}1^2) - 1{,}807^2 = 0{,}0145$$

$$\sigma_X = 0{,}1202$$

On peut démontrer que :

$$\boxed{\begin{aligned}&Var(a.X+b) = a^2.Var(X) \\ &\sigma_{a.X+b} = |a|.\sigma_X\end{aligned}}$$

3. Statistiques à deux variables

On étudie **simultanément** deux caractères X et Y. On rassemble les données dans un tableau à double entrée : la variable X est indicée petit i, la variable Y petit j. Pour chaque couple (X_i,Y_j), on relève l'effectif n_{ij}.

	Caractère Y	j = 1	j = 2	j = 3	j = 4		
Caractère X		-2	0	3	7	ni*	Yi
i = 1	-8	141	58			199	-1,42
i = 2	-4	567	98	17		682	-1,59
i = 3	0	57	320	38		415	0,00
i = 4	5		19	165	16	200	3,04
i = 5	11		165	80	76	321	2,40
i = 6	18				36	36	7,00
	n*j	765	660	300	128	1853	
	Xj	-4,44	1,60	5,46	12,22		

On définit les valeurs suivantes :

$$\boxed{N=\sum_i\sum_j n_{ij} \text{ et } n_{i*}=\sum_j n_{ij} \text{ et } n_{*j}=\sum_i n_{ij}}$$

3.1. Caractéristiques marginales

Ce sont des calculs qui portent **uniquement** sur un seul caractère.

$$\overline{X}=\frac{1}{N}\sum_i\sum_j n_{ij}.x_i=\frac{1}{N}\sum_i n_{i*}.x_i$$

$$\mathrm{Var}(X)=\frac{1}{N}\sum_i n_{i*}.x_i^2-\overline{X}^2$$

Pour notre exemple :

$$\overline{X}=\frac{1}{1853}.((199*(-8)+682*(-4)+...+36*18)=0{,}4636$$

$$\mathrm{Var}(X)=\frac{1}{1852}.(199*(-8)^2+682*(-4)^2+...+36*18^2)-0{,}4636^2=42{,}5012$$

$$\sigma_X=6{,}5193$$

3.2. Caractéristiques conditionnelles

Les calculs sont fait pour une valeur particulière du deuxième paramètre.

$$\boxed{\overline{X_{Y_j}}=\overline{X_j}=\frac{1}{n_{*j}}\sum_i n_{ij}.x_i}$$

3.3. Covariance

De la même façon que l'on a défini la variance pour une variable, on peut définir la covariance ainsi :

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{1}{N}\sum_i\sum_j n_{ij}.(x_i-\overline{X}).(y_j-\overline{Y})$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{1}{N}\sum_i\sum_j n_{ij}.x_i.y_j-\overline{X}.\overline{Y}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{1}{N}\sum_j n_{*j}.\overline{X_j}.y_j-\overline{X}.\overline{Y}=\frac{1}{N}\sum_i n_{i*}.x_i.\overline{Y_i}-\overline{X}.\overline{Y}$$

On peut démontrer que :

$$\boxed{\mathrm{Cov}(a.X+b,c.Y+d)=a.c.\mathrm{Cov}(X,Y)}$$

3.4. Courbes de régression

Il est parfois intéressant d'essayer de **relier les deux caractères** entre eux, en cherchant une relation mathématique.
La courbe de variation de **la moyenne conditionnelle de Y** en fonction de la variable **X** est appelée la courbe de régression de Y en X.

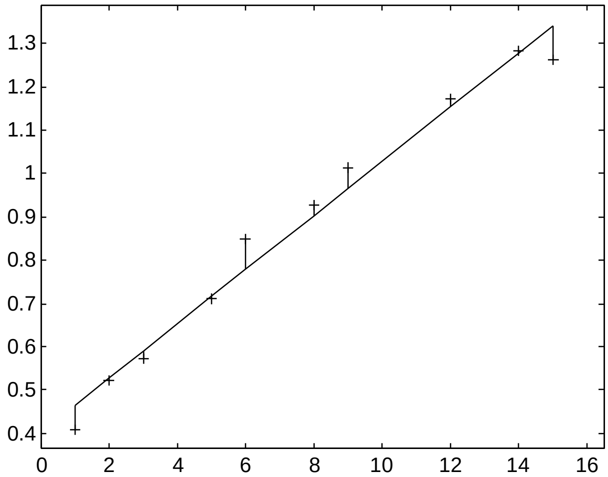
Afin de déterminer numériquement cette courbe, il faut calculer les $\overline{Y_i}$ correspondants aux X_i. On obtient ainsi, un tableau de K points (x_i, y_i).
Toutes les formules qui vont suivre ne feront pas apparaître les effectifs n_{ij}, n_{i*}, n_{*j}, etc… car ils sont égaux à 1. Les formules générales peuvent cependant être utilisées lorsque l'on a pas les données sous forme de tableau de points.

3.5. Méthode des moindres carrés

Cette méthode consiste à minimiser la somme du carré des erreurs entre la courbe et les mesures. Si on cherche à faire coller au mieux la courbe y = f(x) avec les mesures (x_i, y_i), on définit le nombre :

$$S = \sum_{i=1}^{K} (y_i - y)^2 = \sum_{i=1}^{K} (y_i - f(x_i))^2$$

On détermine les paramètres de f(x) pour que S soit minimum.



3.6. Régression linéaire

Dans ce cas là, f(x) = a.x + b. Il nous faut chercher les valeurs de **a** et de **b** qui minimisent **S**. On les obtient en dérivant **S** par rapport à chaque paramètre et en égalant le résultat à zéro.

$$S = \sum_{i=1}^{K} [y_i - (a.x_i + b)]^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0 = \sum_{i=1}^{K} -2.(y_i - a.x_i - b) \Rightarrow \sum_{i=1}^{K} b = \sum_{i=1}^{K} y_i - a \sum_{i=1}^{K} x_i = K.b$$

$$b = \frac{1}{N} \sum_{i} y_i - a.\frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} x_i = \overline{Y} - a.\overline{X}$$

En remplaçant b dans l'équation de départ :

$$S = \sum_{i=1}^{K} [y_i - a.x_i - \overline{Y} + a.\overline{X}]^2 = \sum_{i=1}^{K} [y_i - \overline{Y} - a.(x_i - \overline{X})]^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 = \sum_{i=1}^{K} -2.(x_i - \overline{X}).[y_i - \overline{Y} - a.(x_i - \overline{X})] \Rightarrow \sum_{i=1}^{K} (x_i - \overline{X}).(y_i - \overline{Y}) = a \sum_{i=1}^{K} (x_i - \overline{X})^2$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{K} (x_i - \overline{X}).(y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{K} (x_i - \overline{X})^2} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(X)}$$

En résumé :

$$\boxed{\begin{array}{l} a == \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(X)} \\ b = \overline{Y} - a.\overline{X} \end{array}}$$

3.7. Coefficient de corrélation linéaire

On définit le coefficient de corrélation linéaire de la façon suivante :

$$\boxed{r = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X.\sigma_Y}}$$

On peut montrer que plus le coefficient de corrélation **r** est proche de **1** en valeur absolue, plus la relation linéaire entre les deux caractères est justifiée.

4. Exercices

4.1. Démonstrations de formules théoriques **

a) Déterminer la moyenne et la variance de la variable U = a.X + b en fonction de la moyenne et la variance de la variable X ($a \in R^*, b \in R$).

b) De la même façon, avec U = a.X + b et V = c.Y + d, montrer que : Cov(U,V) = a.c.Cov(X,Y).

4.2. Méthode des moindres carrés *

Le tableau suivant donne les résultats obtenus à partir de 10 essais de laboratoire concernant « la charge de rupture d'un acier » en fonction de sa « teneur en carbone ».

Numéro d'essai	Teneur en carbone x (pour 10000)	Charge de rupture y (Kg)
1	72	90
2	60	70
3	68	80
4	66	80
5	64	75
6	62	75
7	64	80
8	70	85
9	62	70
10	74	100

a) Représenter graphiquement les données de ce tableau.

b) Calculer $\overline{x}$, $\overline{y}$, Var(X), Cov(X,Y).

c) Est-il possible d'envisager une relation linéaire entre X et Y ? Justifier cette réponse à l'aide d'un calcul.

d) Déterminer l'équation de la droite d'ajustement de Y en X par la méthode des moindres carrés.

4.3. Régression linéaire *

Une étude a été faite sur l'évolution du produit national brut et de la consommation privée de 1960 à 1969.

Année	Produit National Brut GF	Consommation privée GF
1960	346	209
1961	365	222
1962	390	238
1963	412	255
1964	439	269
1965	460	281
1966	486	294
1967	508	309
1968	533	326
1969	575	350

On associe au PNB la variable P et à la consommation privée la variable C.

a) Tracer la courbe de P en fonction de C.

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r de la droite de régression de P en C, ainsi que les valeurs de a et b.

4.4. Régression avec changement de variable **

Afin de déterminer la relation qui existe entre la distance nécessaire à l'arrêt d'une voiture D et sa vitesse V, on a rassemblé les résultats suivants :

Distance D (m)	5,3	14,45	20,21	6,5	38,45	11,23	50,42
Vitesse V (Km/h)	33	49	65	33	79	49	93

a) Représenter graphiquement les 7 points. Quelle est la forme de la courbe ?

b) On défini la variable Z comme la racine carrée de V. Déterminer, par la méthode des moindres carrés, la droite de régression de Z en D.

c) En déduire la relation entre D et V et calculer la distance nécessaire à l'arrêt d'une voiture lancée à 85 Km/h.

4.5. Statistique à deux variables **

Une enquête réalisée auprès de 2000 ménages a donné les résultats suivants :

Revenus	moins de	800F à	1000F à	1200F à	1600F à	plus de
Consommation	800 F	1 000 F	1 200 F	1 600 F	2 000 F	2 000 F
moins de 800F	178	141	58			
800F à 1000F	43	567	98	17		
1000F à 1200F		57	320	38		
1200F à 1500F			19	165	16	23
1500F à 1800F				80	76	18
plus de 1800F					36	50

a) On associe au revenus la variable R et à la consommation la variable C. Afin de simplifier les calculs, on pose $X = \frac{R-1100}{100}$ et $Y = \frac{C-1100}{50}$. Calculer les valeurs de $\overline{Y_X}$.

b) Calculer les coefficients de la droite de régression de C en R, en utilisant les propriétés du changement de variable.

Chapitre II
PROBABILITES

1. Généralités

Dans ce chapitre, nous allons présenter un certain nombre de fonctions mathématiques qui nous permettrons de modéliser le comportement de variables aléatoires.
Dans un premier temps, nous essayerons de faire des calculs de dénombrement. Par la suite, nous introduirons les méthodes de calcul de probabilités. Nous définirons enfin, les variables aléatoires et leurs propriétés.

2. Analyse combinatoire

Le but de l'analyse combinatoire est de **déterminer** le nombre de sous ensembles différents que l'on peut obtenir à partir d'un ensemble fini E. Le cardinal de E correspond au nombre entier N d'éléments de E. On utilisera la notation **Card(E) = N**.
Le produit cartésien de deux ensembles finis E et F est formé des couples (x, y), $x \in E$ et $y \in F$ et l'on a :

$$\boxed{\mathrm{Card}(ExF) = \mathrm{Card}(E) * \mathrm{Card}(F)}$$

Si les ensembles E et F sont distincts (i.e. aucuns éléments en commun), on a :

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathrm{Card}(E \cap F) = 0 \\ \mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F)\end{array}}$$

2.1. Arrangements de p éléments parmi n :

C'est le nombre de parties à p éléments **ordonnés** obtenues à partir des N éléments de l'ensemble E. Chaque élément étant utilisé une seule fois (tirage exhaustif sans remise).
Par exemple, si E = {A, B, C}. Il y a 6 arrangements de 2 éléments parmi 3 : AB, BA, AC, CA, BC, CB.

Dans le cas général, pour le **premier** élément, il y a N choix possibles. Pour le **second** élément, il ne reste que N-1 possibilités puisque l'on ne peut pas réutiliser deux fois le même élément. Pour le **troisième**, N-2 choix. Etc... Pour le $p^{ième}$ élément, N-p+1 choix. Soit :

$$\boxed{A_n^p = n.(n-1).(n-2)....(n-p+1)}$$

En utilisant la notation factorielle pour un entier positif n, avec la convention 0! = 1 :

$$\boxed{n! = n.(n-1).n-2)....2.1}$$

On obtient si $p \leq n$:

$$\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

2.2. Permutations

C'est le nombre d'arrangements de n éléments parmi n :

$$\boxed{\mathrm{Per}(E) = n!}$$

2.3. Combinaisons de p éléments parmi n :

C'est le nombre de sous ensembles **non ordonnés** obtenus en prenant p éléments parmi les N de l'ensemble E.
Par exemple , si E = {A, B, C}. Il y a 3 combinaisons de 2 éléments parmi 3 : AB, BC, CA.

Dans le cas général, on détermine le nombre de combinaisons différentes, en partant du nombre d'arrangements de p éléments parmi n, et en éliminant tout les arrangements qui font intervenir les mêmes éléments (pour ne plus tenir compte de l'ordre).
Pour chaque arrangement, il y a p! permutations possibles, donc :

$$\boxed{\begin{array}{l}C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} \\ C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}\end{array}}$$

2.4. Formules remarquables

A partir de la formule précédente, il est facile de démontrer que :

$$C_n^0 = C_n^n = 1 \qquad C_n^p = C_n^{n-p}$$
$$\text{et}$$
$$C_n^1 = C_n^{n-1} = n \qquad C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$$

La construction du triangle de Pascal est alors immédiate :

$n \backslash p$	0	1	2	3	4
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

Ce tableau indique la valeur du nombre de combinaisons de p éléments parmi n.
On peut également démontrer par récurrence la formule du binôme :

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k . a^k . b^{n-k}}$$

En utilisant le triangle de Pascal, il est facile de trouver les coefficients d'un développement :

$$(a+b)^4 = a^4 + 4.a^3.b + 6.a^2.b^2 + 4.a.b^3 + b^4$$

Une autre formule intéressante est obtenue en faisant a = b = 1 dans la formule précédante :

$$\boxed{2^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k}$$

3. Probabilités

3.1. Définitions

On appelle **événement** l'un des résultats possibles d'une expérience. Le calcul d'une probabilité permet de déterminer la confiance que l'on a de voir apparaître l'événement choisi, au cours de l'expérience.
Si l'événement est certain d'apparaître, on va lui affecter la probabilité 1. Si il est impossible que cet événement survienne, on lui donnera la probabilité 0. La probabilité d'un événement quelconque appartiendra donc à l'intervalle [0, 1] !!!

On va noter :

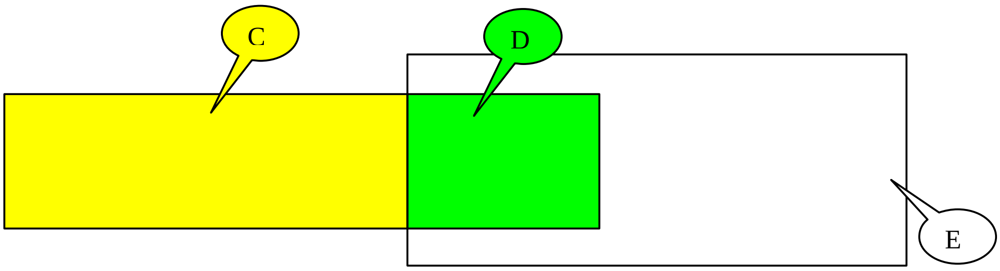
- $\varnothing$ L'événement **impossible** et $\Pr ob(\varnothing) = 0$
- Ω L'événement **certain** et $\Pr ob(\Omega) = 1$
- L'événement $A \cup B$ est réalisé si l'événement A **ou** l'événement B sont réalisés.
- L'événement $A \cap B$ est réalisé si l'événement A **et** l'événement B sont réalisés simultanément.
- Deux événements sont **incompatibles** si :
$$\boxed{\Pr ob(A \cap B) = 0}$$
- Deux événements sont **équiprobables** s'ils ont la même probabilité :
$$\boxed{\Pr ob(A) = \Pr ob(B)}$$
- Si A est un événement, $\overline{A}$ est l'événement **contraire** tel que :
$$\boxed{\begin{array}{l}\Pr ob(A \cup \overline{A}) = 1 \\ \Pr ob(A \cap \overline{A}) = 0\end{array}}$$
- Une relation évidente intéressante :
$$\boxed{\Pr ob(A \cap \overline{B}) + \Pr ob(A \cap B) = \Pr ob(A)}$$

3.2. Propriétés

Si on note Card(Ω), le nombre de tous les événements possibles de l'expérience et Card(A) le nombre de cas où l'événement A est réalisé, alors on peut écrire :

$$\boxed{\Pr ob(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}}$$

En raisonnant en termes d'ensemble, on peut écrire la relation :



On peut définir :

$A = C \cup D$ et $B = D \cup E$

On a alors :

$D = A \cap B$ et $C \cup D \cup E = A \cup B$

$\mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) = \mathrm{Card}(C \cup D) + \mathrm{Card}(D \cup E)$

C, D et E sont distincs, donc :

$\mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) = \mathrm{Card}(C) + \mathrm{Card}(D) + \mathrm{Card}(D) + \mathrm{Card}(E)$

$\mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) = \mathrm{Card}(C \cup D \cup E) + \mathrm{Card}(D) = \mathrm{Card}(A \cup B) + \mathrm{Card}(A \cap B)$

En divisant par $\mathrm{Card}(\Omega)$, on obtient :

$$\boxed{\mathrm{Prob}(A) + \mathrm{Prob}(B) = \mathrm{Prob}(A \cup B) + \mathrm{Prob}(A \cap B)}$$

Si les événements sont **incompatibles** :

$$\boxed{\mathrm{Prob}(A \cup B) = \mathrm{Prob}(A) + \mathrm{Prob}(B)}$$

Pour l'événement A et sont contraire :

$$\boxed{\mathrm{Prob}(A \cup \overline{A}) = \mathrm{Prob}(A) + \mathrm{Prob}(\overline{A}) = \mathrm{Prob}(\Omega) = 1}$$

3.3. Probabilités conditionnelles

On s'intéresse au problème de déterminer la probabilité d'obtenir l'événement A **sachant** que l'événement B est arrivé. On note cet événement A / B.

Le nombre de cas où A / B arrive est égal à $\mathrm{Card}(A \cap B)$, le nombre de tous les cas possibles étant Card(B) (tous les événements où B se produit). On arrive donc à la relation :

$$\boxed{\mathrm{Prob}(A / B) = \frac{\mathrm{Prob}(A \cap B)}{\mathrm{Prob}(B)}}$$

3.4. Evénements indépendants

On dit que deux événements sont indépendants, si Prob(A / B) ne dépend pas de Prob(B). Soit si Prob(A / B) = Prob(A). Donc :

$$\boxed{\mathrm{Prob}(A \cap B) = \mathrm{Prob}(A).\mathrm{Prob}(B)}$$

4. Variables aléatoires

En faisant correspondre **une valeur numérique réelle** à un événement, on crée une variable aléatoire. On utilisera l'abréviation v.a. pour variable aléatoire et on notera par une lettre **majuscule** le nom de la variable, par une lettre **minuscule** une de ses valeurs possibles.

Il existe deux grandes classes de variables aléatoires :

- Les variables **discrètes** qui prennent des valeurs dans un ensemble fini ou infini dénombrable. Elles peuvent prendre deux fois la même valeur par exemple.
- Les variables **continues** qui peuvent prendre n'importe qu'elle valeur réelle dans un intervalle.

4.1. Fonction de répartition

La fonction de répartition est la fonction suivante :

$$\boxed{F(x) = \Pr ob(X \le x)}$$

On peut trouver dans certains ouvrages, une définition légèrement différente qui utilise le signe d'infériorité stricte. Cela engendre que de faibles modifications, mais il faut y être attentif !!!

C'est une fonction positive et croissante, qui prend ses valeurs dans l'intervalle [0, 1].

On a évidemment, car $X > x$ et $X \le x$ sont deux événements contraires :

$$\boxed{F(x) = 1 - \Pr ob(X > x)}$$

Une autre relation à retenir :

$$\boxed{F(a) - F(b) = \Pr ob(b < X \le a)}$$

4.2. Loi de probabilité (v.a. discrète)

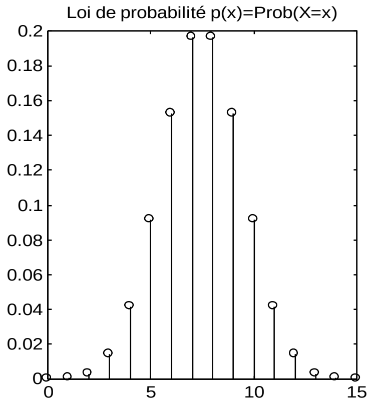
La loi de probabilité de la variable aléatoire X définie pour tout x appartenant au domaine de définition de X, est la fonction de x suivante :

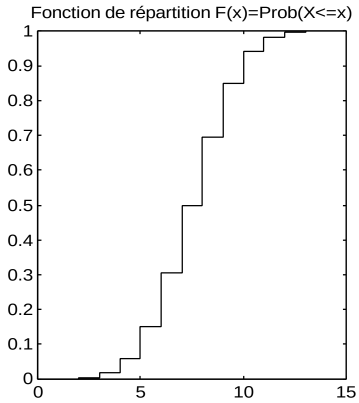
$$\boxed{p(x) = \Pr ob(X = x)}$$

Cette fonction est parfois appelée distribution de la variable aléatoire X. C'est une fonction discontinue qui est souvent représenté par un diagramme à bâtons. La relation entre p(x) et F(x) est la suivante :

$$\boxed{F(x) = \sum_{k=-\infty}^{x} p(x_k)}$$

La fonction de répartition est une courbe en escalier :





On peut vérifier que p(x) est une ldp par la relation :

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(x_k) = 1}$$

4.3. Densité de probabilité (v.a. continue)

La densité de probabilité est la **dérivée** de la fonction de répartition :

$$\boxed{f(x) = \frac{dF(x)}{dx}}$$

C'est une fonction continue. La relation entre f(x) et F(x) est la suivante :

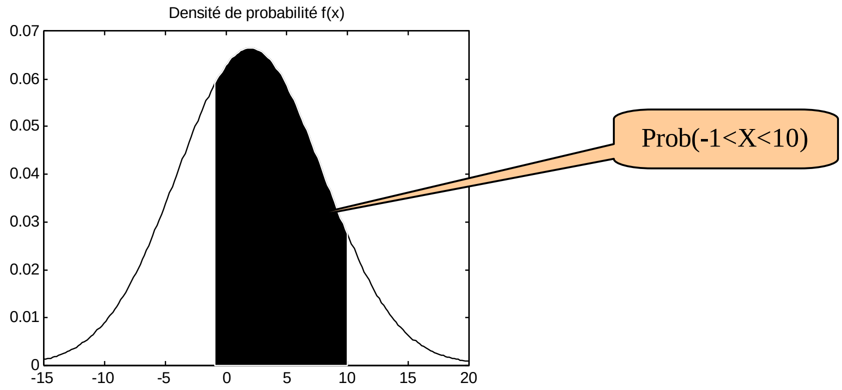
$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u).du}$$

On peut trouver une représentation physique de f(x) par la relation suivante :

$$f(x).dx = F(x + dx) - F(x) = \Pr ob(X \le x + dx) - \Pr ob(X \le x)$$

$$f(x).dx = \Pr ob(x < X \le x + dx)$$

L'aire entre la courbe de densité de probabilité et l'axe des x sur un intervalle [a, b] est la probabilité $\Pr ob(a \le X \le b)$.



On peut vérifier que f(x) est une ddp par la relation :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx = 1}$$

La densité de probabilité de la variable $Y = \varphi(X)$ est donnée par la formule générale :

$$\boxed{g(\mathbf{y}) = \frac{f(\varphi^{-1}(\mathbf{y}))}{|\det \mathbf{J}|}}$$

J est le Jacobien de la transformation :

$$\det \mathbf{J} = \begin{vmatrix} \frac{\delta y_1}{\delta x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\delta y_n}{\delta x_1} \\ \cdots & & & \cdots \\ \cdots & & & \cdots \\ \frac{\delta y_1}{\delta x_n} & \cdots & \cdots & \frac{\delta y_n}{\delta x_n} \end{vmatrix}$$

4.4. Espérance mathématique d'une variable aléatoire

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X est, si elle existe, la **moyenne arithmétique** de ses valeurs possibles pondérée par **les probabilités correspondantes**.

- Cas discret :

$$\boxed{E(X) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k.p(x_k)}$$

- Cas continu :

$$\boxed{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x).dx}$$

On peut démontrer les propriétés suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{l} E(a.X + b) = a.E(X) + b \text{ avec } a, b \in \Re \\ E(X + Y) = E(X) + E(Y) \end{array}}$$

Si les variables sont indépendantes:

$$\boxed{E(X.Y) = E(X).E(Y)}$$

4.5. Moments d'ordre q d'une variable aléatoire

Pour un nombre entier q supérieur à un, on définit le moment d'ordre q de la manière suivante :

$$\boxed{\mu_q(X) = E(X^q)}$$

4.6. Fonction caractéristique

Jean Baptiste Joseph Fourier est né Auxerre le 21 mars 1768. Il est mort à Paris le 16 Mai 1830.

La fonction caractéristique est la transformée de Fourier de la loi de probabilité de X :

$$\boxed{\varphi_X(f) = E(e^{ifX})}$$

Une propriété intéressante des dérivées de la fonction caractéristique permet de calculer les moments d'ordre q :

$$\boxed{\left.\frac{d^q}{df^q}\{\varphi_X(f)\}\right|_{f=0} = i^q.E(X^q) = i^q.\mu_q(X)}$$

4.7. Variance d'une variable aléatoire

La variance est définie comme l'espérance de la variable aléatoire centrée élevée au carrée :

$$\boxed{Var(X) = E([X - E(X)]^2)}$$

Les propriétés remarquables sont les suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{l} Var(a.X + b) = a^2.Var(X) \text{ avec } a, b \in \Re \\ Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \mu_2(X) - \mu_1^2(X) \end{array}}$$

Si les variables sont indépendantes :

$$\boxed{Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)}$$

4.8. Ecart type

L'écart type s est la racine carrée de la variance :

$$\boxed{\sigma_X = \sqrt{Var(X)}}$$

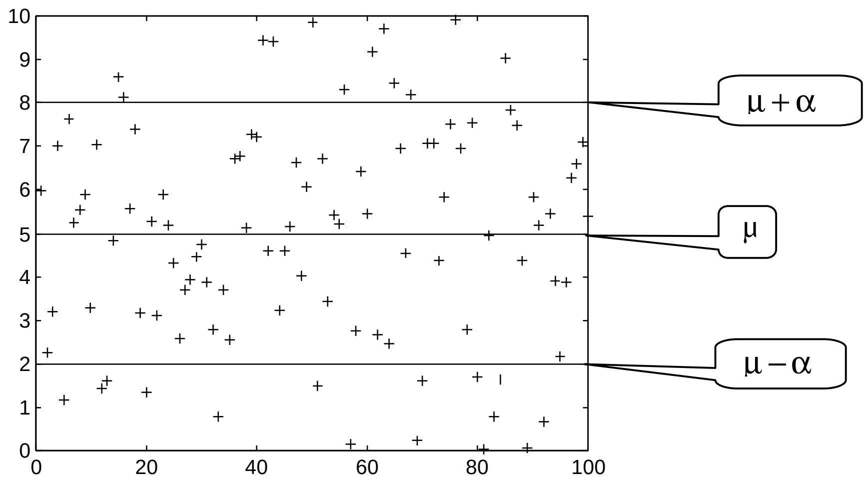
4.9. Inégalité de Bienaymé-Tchebitchev

Irénée-Jules Bienaymé est né à Paris 28 Août 1796. Il est mort à Paris le 19 Octobre 1878.

Pafnuty Lvovich Chebyshev est né à Okatovo 16 Mai 1821. Il est mort à St Petersburg le 8 Décembre 1894.

Cette inégalité sert à **déterminer** un encadrement des valeurs de la v.a. en fonction d'un seuil de probabilité.

Si on cherche à déterminer la probabilité que $|x-\mu| \geq \alpha$, c'est à dire connaître le nombre de fois que la v.a. X dépasse $\mu+\alpha$ ou qu'elle soit inférieure à $\mu-\alpha$:



On peut calculer la variance de X :

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^2 . f(x).dx = \int_{|x-\mu|\geq\alpha} (x-\mu_X)^2 . f(x).dx + \int_{\mu-\alpha}^{\mu+\alpha} (x-\mu_X)^2 . f(x).dx$$

$$\sigma_X^2 \geq \int_{|x-\mu|\geq\alpha} (x-\mu_X)^2 . f(x).dx \geq \alpha^2 . \int_{|x-\mu|\geq\alpha} f(x).dx$$

$$\Rightarrow \Pr ob(|X-\mu_X| \geq \alpha) \leq \frac{\sigma_X^2}{\alpha^2}$$

Soit encore :

$$\boxed{\Pr ob(\frac{|X-\mu_X|}{\sigma_X} \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^2}}$$

L'encadrement recherché est donc $\lambda.\sigma_X - \mu_X < X < \lambda.\sigma_X + \mu_X$ avec une probabilité de $1-\frac{1}{\lambda^2}$.

5. Exercices d'analyse combinatoire

5.1. Poker *

Calculer le nombre de possibilités de chaque main de 5 cartes du jeu de poker (quinte fluch, carré, full, couleur, quinte, brelan, 2 paires, une paire).

5.2. Numérotation *

Combien de nombre ont deux chiffres 7 entre 0 et 9999 ? Combien ne commencent pas par 0 ?

5.3. Groupes *

Un atelier comprend 15 ouvriers, 7 hommes et 8 femmes. On choisi de faire des groupes de 5.

a) Combien de groupes différents peut-on former ?
b) Combien de groupes comportant 3 hommes seulement ?

5.4. Verrou *

Un verrou à combinaisons est ouvert en faisant un tour à droite vers l'indexe A, un tour à gauche vers l'indexe B, un tour à droite vers l'indexe C. A, B, C ne sont pas nécessairement différents. Combien peut-on fabriquer de verrous différents si A, B, C sont sélectionnés parmi les chiffres de 0 à 9 ?

5.5. Alphabet *

En considérant les lettres de l'alphabet :

a) Combien peut-on former de mots de trois lettres ?
b) Combien y en a-t-il constitués de deux consonnes et une voyelle ?
c) De trois consonnes ?
d) d'au moins une voyelle ?

5.6. Lecture *

Parmi un groupe de 20 personnes, 10 lisent une revue A, 8 lisent le journal B et 3 lisent les deux. De combien de façons différentes peut-on choisir 5 personnes parmi 20 si :

a) Chacune des 5 personnes lit au moins une revue ?
b) Trois d'entre elles lisent la revue A, les autres le journal B, chacune d'elles ne lisant qu'une seule revue ?
c) Trois d'entre elles au moins lisent la revue A ? (de deux façons différentes)

5.7. Conseil municipal **

Le conseil municipal d'un petit village est composé de 5 femmes et 5 hommes.

a) Au début d'une réunion, toutes les personnes se serrent la main. Combien de poignées de mains seront échangées ?
b) On décide de faire asseoir les conseillers autour de la table de réunion en plaçant alternativement une femme à coté d'un homme. Combien il y a-t-il de possibilités différentes (on ne tient compte que de la position relative des conseillers les uns par rapport aux autres) ?
c) Les places autour de la table sont maintenant numérotées. Même question.

5.8. Etagères *

Une étagère comporte 10 livres différents. Parmi ceux-ci, 3 tomes d'une même collection.

a) De combien de façons peut-on ranger cette étagère en ayant les trois tomes l'un à coté de l'autre ?
b) Même question mais dans l'ordre.

5.9. Piratage *

Un pirate s'est débrouillé pour connaître la taille du mot de passe du super-utilisateur d'un serveur de fichiers : 8 caractères exactement. Sachant qu'un caractère est codé sur 7 bits et que le test d'un mot de passe dure 0.1 ms.

a) Combien de temps le pirate mettra-t-il a trouver le bon code au pire des cas ?
b) Le pirate connaît deux caractères du code mais pas leurs emplacement. Même question.

6. Exercices de calcul de probabilités

6.1. Jeu de carte **

On prend trois cartes, une blanche d'un coté et rouge, une blanche des deux cotés et une rouge des deux cotés. On tire une carte parmi les trois et on note sa couleur. Quelle est la probabilité de voir la même couleur au dos de la carte ?

6.2. Loterie 1 *

Dans une loterie où les billets sont numérotés de 0 à 999999, quelle est la probabilité pour que les six chiffres d'un billet pris au hasard soient tous différents ?

6.3. Roulette *

Une roulette de casino comprend 16 numéros rouges, 16 noirs et un vert. A la fin de 10 parties consécutives, le rouges et sorti 7 fois, le noir 2 fois et le vert 1 fois.

a) Quelle est la probabilité de cet événement ?
b) Quelle est la probabilité que le rouge sorte 10 fois sur 10 ?

6.4. Clavier *

Un clavier comporte 57 touches dont 34 caractères et 10 chiffres. On suppose que la probabilité de frapper une touche est la même quelle que soit la touche.

a) Quelle est la probabilité pour qu'en frappant successivement sur 5 touches, la personne frappe une suite de 5 lettres ?
b) Quelle est la probabilité de frapper le mot « clavier » ?

6.5. Tirage 1 *

a) Une urne contient 20 boules (8 rouges, 3 jaunes et 9 bleus). 3 boules sont tirées simultanément. Quelle est la probabilité de tirer 3 boules rouges ?
b) Seulement 1 jaune sur les 3 ?
c) 1 jaune au moins ?

6.6. Tirage 2 *

Dans une boite contenant 2 jetons rouges et 2 jaunes, quelle est la probabilité de tirer 2 jetons jaunes d'un coup ?

6.7. Jeu de dés 1 *

Un dé est lancé 6 fois. Quelle est la probabilité d'obtenir un 1, deux 2 et 3 trois ?

6.8. Jeu de dés 2 *

Une paire de dés est lancée 6 fois.
a) Quelle est la probabilité d'obtenir un total de 9 exactement 2 fois ?
b) Quelle est la probabilité d'obtenir un total de 9 au moins deux fois ?

6.9. Feux de circulation *

Un conducteur rencontre 4 feux de la circulation, chaque feu pouvant être soit rouge soit vert avec la même probabilité. Quelle est la probabilité, pour le conducteur, d'être arrêté par le 3 ^{ème} feu ?

6.10. Anniversaire **

Déterminer la probabilité que sur un groupe de 35 personnes, il y ai au moins deux personnes qui fêtent leurs anniversaires le même jour (on négligera le cas des années bissextiles).

6.11. Pile ou face *

a) Dans un jeu de pile ou face avec une pièce parfaite, quelle est la probabilité de faire pile lorsqu'on joue une fois ?
b) Même question si on joue deux fois ?

6.12. Jeu de dés 3 *

A et B jouent aux dés (un chacun). Celui qui fait un chiffre plus élevé que l'autre a gagné. Si il y a égalité le coup est nul.
a) Quelle est la probabilité pour que A gagne ?
b) Pour qu'il ne gagne pas ?
c) Pour que A gagne sachant que B a fait 4 ?

6.13. Probabilités de réussite *

Sur un groupe de 500 personnes, 200 ont réussi les 2 parties d'un problème, 100 seulement la première et 50 seulement la seconde. On note A l'événement « réussir la 1ère partie » et B « réussir la 2ème partie ».
a) Calculer la probabilité de A.
b) Calculer la probabilité de réussir la 2ème partie sachant que l'on a réussi la première.

6.14. Election *

On forme un comité de 4 membres choisis au hasard parmi 7 personnes dont deux frères.
a) Quelle est la probabilité pour que les deux frères soient choisis ?
b) Pour que l'un d'eux au moins le soit ?
c) Pour qu'aucun des deux soit choisi ?

6.15. Cinéma *

Un cinéma prévoit un spectacle différent chaque jour de l'année, dont 73 films policiers. Quelle est la probabilité pour qu'une personne rentrant un jour au hasard assiste à :
a) Un film policier ?
b) Monsieur Dupont va 1 fois par mois au cinéma. Quelle est la probabilité pour qu'il assiste à un film policier et un seul durant l'année ?
c) 12 films non policiers ?
d) Au moins 2 films policiers ?
e) 4 films non policiers seulement ?

6.16. Carte électronique *

On fabrique une carte en utilisant deux composants discrets. On a pu déterminer les probabilités suivantes:

- Prob(Le composant A fonctionne) = 80 %.
- Prob(Les composants A et B sont en panne) = 10 %.
- Prob(Le composant B seulement est hors service) = 20 %.

a) Quelle est la Probabilité que le composant A soit en panne sachant que B l'est aussi ?
b) Quelle est la Probabilité que le composant A seulement soit en panne ?
c) Expliciter l'événement: « au moins un des deux composant est hors service » ? En déduire la probabilité que la carte fonctionne.

6.17. Cambriolage *

Une société de gardiennage protège des résidences contre le cambriolage par des alarmes. Leur expérience montre que:

- La probabilité que l'alarme se déclenche s'il y a cambriolage est de 95 %.
- La probabilité que l'alarme sonne sans qu'il y ait cambriolage est de 1 %.
- La probabilité d'avoir un cambriolage dans la journée est de 0.7 %.

a) Expliciter les différents événements et leurs probabilités.
b) Calculer la probabilité que l'alarme sonne dans la journée.
c) Déterminer la probabilité qu'il y ait vraiment un cambriolage si l'alarme se déclenche.
d) Les événements « l'alarme sonne » et « il y a cambriolage » sont ils indépendants ?

6.18. Fabrication *

Deux usines fabriquent les mêmes pièces. La première en produit 30 % avec 20 % de défauts. La seconde n'a que 8 % de défauts par pièce.

a) Quel est le pourcentage de pièces bonnes sur l'ensemble du marché, supposé alimenté par les deux usines ?
b) Parmi les pièces ayant un défaut, quel pourcentage provient de la première usine ?
c) On achète un pièce bonne. Quelle est la probabilité pour qu'elle provienne de la deuxième usine ?

6.19. Informatique *

Un département informatique possède un réseau connecté à 3 serveurs de fichiers. En une journée, la probabilité pour que le serveur A soit en panne est de 5 %, 1 % pour le serveur B et 10 % pour le serveur C. Quelle est la probabilité d'avoir au cours d'une journée :

a) n serveur inutilisables ?
b) Deux serveurs en panne seulement ?
c) Aucunes défaillances ?

6.20. Enquête **

On fait une enquête sur la voie publique pour connaître les réactions des gens sur l'achat éventuel d'une voiture. On interroge 250 personnes, 200 hommes et 50 femmes. 120 hommes et 10 femmes sont acheteurs. Soit H l'événement « être un homme », et A l'événement « être acheteur ».

On réinterroge une des 250 personnes :

a) Déduire d'après l'énoncé Prob(A), Prob(H), Prob($H \cap A$), Prob($\overline{H} \cap A$), Prob(H / A), Prob($\overline{H} / A$).
b) Les événements « être un homme » et « être acheteur » sont-ils indépendants ?

6.21. Etude théorique **

La fonction de répartition d'une v.a. X est :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le -1 \\ a + b.\arcsin(x) & -1 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

a) Déterminer a et b.
b) Calculer E(X) et Var(X).

6.22. Tapis vert *

Le jeu tapis vert fonctionne de la manière suivante : 4 cartes d'un jeu de 32 sont retournées, une dans chaque couleur (cœur, carreau, pique et trèfle). Le joueur gagne 1000 F si il obtient un carré, 30 F si il a 3 cartes équivalentes et 2 F si il en a deux.

a) Calculer la probabilité de chaque cas.
b) Quelle est l'espérance de la v.a. X égale au gain en franc du joueur ?

6.23. Jeu de dés 4 **

On lance un dé parfaitement équilibré jusqu'à obtenir le 6. P_i est la probabilité d'obtenir le 6 au bout de i coups.

a) Calculer P_i.

b) Vérifier que $\sum_{i=1}^{\infty} P_i = 1$.

c) Calculer E(I).

6.24. Pièce de monnaie ***

Une pièce de monnaie est jetée 4 fois. Soit X la v.a. « nombre d'apparition de faces » et Y la v.a. « plus grande longueur de la file de faces adjacentes ».

a) A l'aide d'un diagramme en arbre construire l'espace des événements.

b) Calculer E(X) et Var(X).

c) Calculer E(Y) et Var(Y).

d) Déterminer $\mathrm{Prob}(X = x_i \cap Y = y_j)$.

e) Calculer Cov(X,Y).

6.25. Loterie 2 **

On considère une roue de loterie divisée en x secteurs égaux. Un secteur est rouge, 3 sont blancs et les autres bleus ($x \geq 4$). Un joueur fait tourner la roue et regarde la couleur obtenue : Si elle est rouge, il gagne 4 F ; si elle est blanche, il perd 2 F ; Si elle est bleue, il rejoue et dans ce deuxième tirage, le rouge lui fait gagner 6 F, le blanc perdre 1 F. En cas de nouveau bleu il ne gagne ni ne perd rien.

a) Etablir la loi de probabilité de X en fonction de x.

b) Déterminer E(X).

c) Déterminer x pour que E(X) = 0.

d) Déterminer x pour que E(X) soit maximale.

6.26. Jeu compliqué ***

On dispose d'une urne contenant 1/3 de boules noires et 2/3 de boules blanches, d'une cible. On considère le jeu suivant : le joueur tire sur la cible ; Si il l'atteint, il a gagné ; Sinon, il prend une boule dans l'urne. Si elle est noire, il a perdu ; Si elle est blanche, il retire sur la cible. On reprend ensuite les mêmes règles.

Soit p la probabilité que le joueur atteigne la cible. On note les événements suivants :

- An = « Le joueur gagne à l'issue du n ième tir ».
- Bn = « Le joueur perd à l'issue du n ième tir ».
- A = « Le joueur gagne ».
- B = « Le joueur perd ».
- C = « La partie ne s'arrête pas ».

a) Calculer en fonction de p les probabilités de An et Bn.

b) Calculer les probabilités de A, B, C.

c) Etudier en fonction de p, le fait que le joueur ait plus ou moins de chances de gagner à ce jeu (étude de Prob(A) - Prob(B)).

6.27. Révisions ****

Les étudiants ont 20 textes a réviser pour l'oral d'anglais. Un candidat tire 3 textes au hasard et parmi ces trois sujets, choisit celui qu'il veut traiter. Si l'étudiant n'a révisé que 12 textes et si on appelle X la v.a. égale au nombre de textes révisés parmi les trois tirés. Déterminer la loi de probabilité de X, sa moyenne.

Un étudiant fort en probabilités cherche a déterminer le nombre minimal n de textes qu'il pourrait réviser pour avoir au moins 80 % de chance de réviser un texte dans les trois qu'il tire lors de l'oral. Expliquer la méthode qu'il utilise et calculer n.

6.28. Jeu de dés 4 ****

On jette n fois de suite un dé à 6 faces. Comment peut-on choisir n pour que le nombre de 6 obtenus soit compris entre 0 et n/3 avec une probabilité au moins égale à 90 % ? On pourra utiliser la v.a. X_i qui vaut 1 si on a tiré un 6 au i ème coup et 0 sinon. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev sur la somme $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Chapitre III MODELES PROBABILISTES

1. Généralités

Nous allons présenter ici quelques modèles mathématiques de distribution les plus utilisées. Les résultats obtenus ne seront pas tous démontrés car ils font appel à des calculs mathématiques d'un niveau supérieur à celui des étudiants IUT en général. On prendra alors ce chapitre comme un formulaire de base sur les modèles probabilistes.

2. Modèles de distributions discrètes

2.1. v.a. de Bernoulli

James Bernoulli est né à Bâle le 27 Décembre 1654. Il est mort le 16 Août 1705.

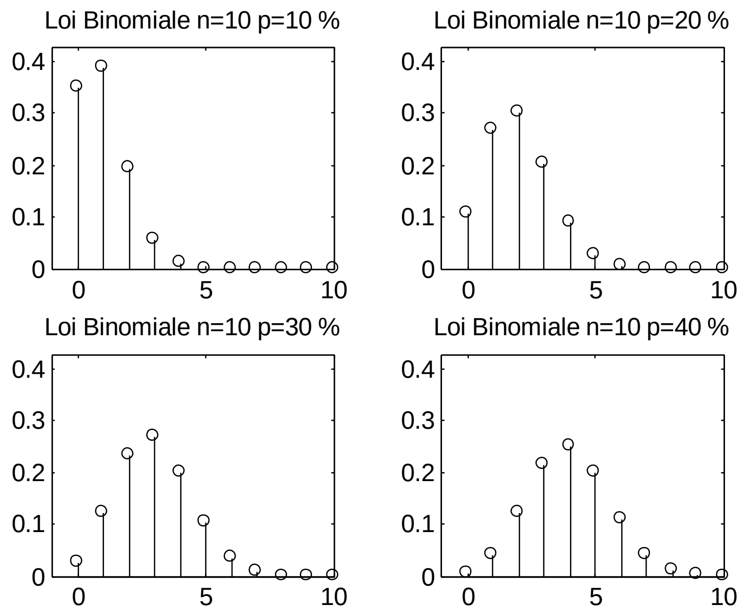
Une variable aléatoire de Bernouilli ne peut prendre que **deux** valeurs distinctes. Chacune ayant une probabilité constante et complémentaire de l'autre.
En cas de succès de l'expérience (avec la probabilité **p**), la variable prend la valeur 1. En cas d'échec (avec la probabilité $q = 1 - p$), la variable prend la valeur 0.
L'espérance et la variance de cette variable aléatoire sont donc :

$$\boxed{\begin{aligned} &E(X) = 0.q + 1.p = p \\ &Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 0^2.q + 1^2.p - p^2 = p - p^2 = p.q \end{aligned}}$$

2.2. Loi binomiale

La variable aléatoire binomiale d'ordre n, B, est définie comme la somme de n variables aléatoires de Bernouilli indépendantes. Elle aura comme valeur, le nombre de succès réalisés sur les n essais de l'expérience. Donc $B \in [0, n]$.
Puisqu'il existe C_n^b façons d'obtenir b succès sur n essais avec la probabilité $p^b.q^{n-b}$ (les événements étants indépendants). La loi de probabilité est donc :

$$\boxed{\Pr ob(B = b) = C_n^b.p^b.q^{n-b}}$$



On trouve alors :

$$\boxed{\begin{array}{l} E(B) = n.p \\ Var(B) = n.p.q \end{array}}$$

2.3. Loi hypergéométrique

Si le tirage est exhaustif, sans remise, les probabilités de succès et d'échec ne sont plus constantes.
Si dans ce cas, on définit :

- **n** comme le nombre de résultats possibles de l'expérience.
- **p** comme la proportion de succès , n.p étant le nombre de succès possibles ($n.p \in N$).
- **q** comme la proportion d'échecs , n.q = n.(1 - p) étant le nombre d'échecs possibles ($n.q \in N$).
- **x** comme étant le nombre d'essais ($x \le n.p$ et $x \le n.q$).

Le nombre de résultats possible sur les x essais est $Card(\Omega) = C_n^x$. Le nombre de façons d'avoir h succès exactement est $C_{n.p}^h . C_{n.q}^{x-h}$. La loi de distribution de la variable aléatoire H (nombre de succès de l'expérience) est :

$$\boxed{Prob(H = h) = \frac{C_{n.p}^h . C_{n.q}^{x-h}}{C_n^x}}$$

On trouve alors :

$$\boxed{\begin{array}{l} E(H) = x.p \\ Var(H) = x.p.q.\dfrac{n-x}{n-1} \end{array}}$$

2.4. Loi de Poisson

Siméon Denis Poisson est né à Pithviers le 21 Juin 1781. Il est mort à Paris le 25 Avril 1840.

Processus de Poisson

Le processus de Poisson correspond à la réalisation dans le temps d'événements aléatoires répondants aux hypothèses suivantes :

- La probabilité de réalisation d'un événement pendant un temps Δt est **proportionnelle à la durée** de cette période : $\alpha.\Delta t$.
- Elle est **indépendante** du nombre d'événements qui se sont produits antérieurement et reste **constante** sur Δt.
- La probabilité d'avoir deux réalisations successives pendant Δt est **négligeable**.

Loi de distribution

Si on enregistre au cours du temps τ, le nombre d'événements P provenant d'un processus de Poisson de constante de proportionnalité α, on définit une v.a. de Poisson de paramètre $\lambda = \alpha.\tau$.

Afin de déterminer la loi de distribution de P, on va utiliser la notation $Prob_p(t)$ pour écrire la probabilité d'avoir enregistré p événements au temps t. La définition du processus de Poisson donne donc :

$$\boxed{Prob_1(\Delta t) = \alpha.\Delta t \text{ et } Prob_0(\Delta t) = 1 - \alpha.\Delta t}$$

La probabilité d'avoir au temps t + Δt, aucun événement est donnée par la formule :

$$\mathrm{Prob}_0(t+\Delta t) = \mathrm{Prob}_0(t).\mathrm{Prob}_0(\Delta t)$$

$$\mathrm{Prob}_0(t+\Delta t) = \mathrm{Prob}_0(t).(1-\alpha.\Delta t)$$

$$\mathrm{Prob}_0(t+\Delta t) - \mathrm{Prob}_0(t) = -\alpha.\Delta t.\mathrm{Prob}_p(t)$$

$$\frac{\mathrm{Prob}_0(t+\Delta t) - \mathrm{Prob}_0(t)}{\Delta t} = -\alpha.\mathrm{Prob}_0(t) = \frac{d}{dt}\mathrm{Prob}_0(t)$$

On trouve donc :

$$\mathrm{Prob}_0(t) = A.e^{-\alpha.t}$$

A est obtenu pour t = 0 : $\mathrm{Prob}_0(0) = 0 \Rightarrow A = 1$

$$\mathrm{Prob}_0(t) = e^{-\alpha.t}$$

Si $p \geq 1$, pour avoir p réalisations au temps t + Δt, deux possibilités existent :

- p événements sur t et 0 sur Δt.
- p - 1 événements sur t et 1 sur Δt.

$$\mathrm{Prob}_p(t+\Delta t) = \mathrm{Prob}_p(t).\mathrm{Prob}_0(\Delta t) + \mathrm{Prob}_{p-1}(t).\mathrm{Prob}_1(\Delta t)$$

$$\mathrm{Prob}_p(t+\Delta t) = \mathrm{Prob}_p(t).(1-\alpha.\Delta t) + \mathrm{Prob}_{p-1}(t).\alpha.\Delta t$$

$$\mathrm{Prob}_p(t+\Delta t) - \mathrm{Prob}_p(t) = \left[\mathrm{Prob}_{p-1}(t) - \mathrm{Prob}_p(t)\right].\alpha.\Delta t$$

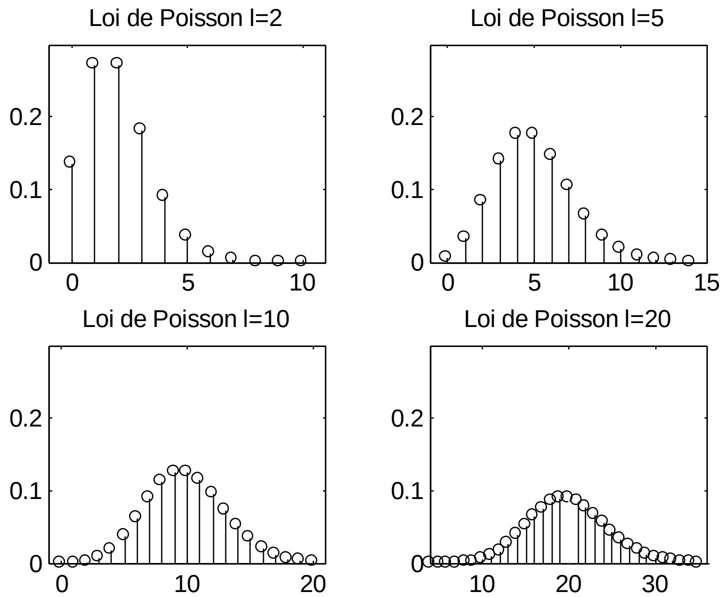
$$\frac{\mathrm{Prob}_p(t+\Delta t) - \mathrm{Prob}_p(t)}{\Delta t} = \alpha.\left[\mathrm{Prob}_{p-1}(t) - \mathrm{Prob}_p(t)\right] = \frac{d}{dt}\mathrm{Prob}_p(t)$$

On démontre alors par récurrence la relation :

$$\boxed{\mathrm{Prob}_p(t) = e^{-\alpha.t}.\frac{(\alpha.t)^p}{p!} \text{ avec } p \in [0,+\infty[}$$

donc si $\lambda = \alpha.\tau$:

$$\boxed{\mathrm{Prob}(P=p) = e^{-\lambda}.\frac{\lambda^p}{p!}}$$



On trouve alors :

$$\boxed{\begin{array}{l} E(P) = \lambda \\ \mathrm{Var}(P) = \lambda \end{array}}$$

2.5. Approximations

Dans certaines conditions sur les paramètres, les lois peuvent être **approximées** les unes par les autres.

Loi Hypergéométrique (n ,x , p)		Loi Binomiale (n, p)
$\Pr ob(H=h)=\frac{C_{n.p}^{h}.C_{n.q}^{x-h}}{C_{n}^{x}}$ $E(H)=x.p$ $Var(H)=x.p.q.\frac{n-x}{n-1}$	$10x < n$ $n >> 1$	$\Pr ob(B=b)=C_{n}^{b}.p^{b}.q^{n-b}$ $E(B)=n.p$ $Var(B)=n.p.q$
Loi Binomiale (n, p)		Loi de Poisson (n.p)
$\Pr ob(B=b)=C_{n}^{b}.p^{b}.q^{n-b}$ $E(B)=n.p$ $Var(B)=n.p.q$	$p < 10\%$ $n > 50$ $n.p < 5$	$\Pr ob(P=p)=e^{-\lambda}.\frac{\lambda^{p}}{p!}$ $E(P)=\lambda$ $Var(P)=\lambda$

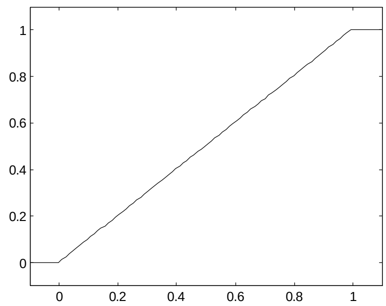
3. Modèles de distributions continues

3.1. Loi uniforme

Si une variable aléatoire U, définie sur un intervalle [a, b], a une probabilité **constante** d'apparaître, alors elle suit une loi uniforme. Comme $\int_{a}^{b} f(u).du = 1$, on trouve donc :

$$\boxed{\begin{array}{l} f(u)=\frac{1}{b-a} \\ E(U)=\frac{a+b}{2} \\ Var(U)=\frac{(b-a)^2}{12} \end{array}}$$

Fonction de répartition d'une loi uniforme sur [0,1]



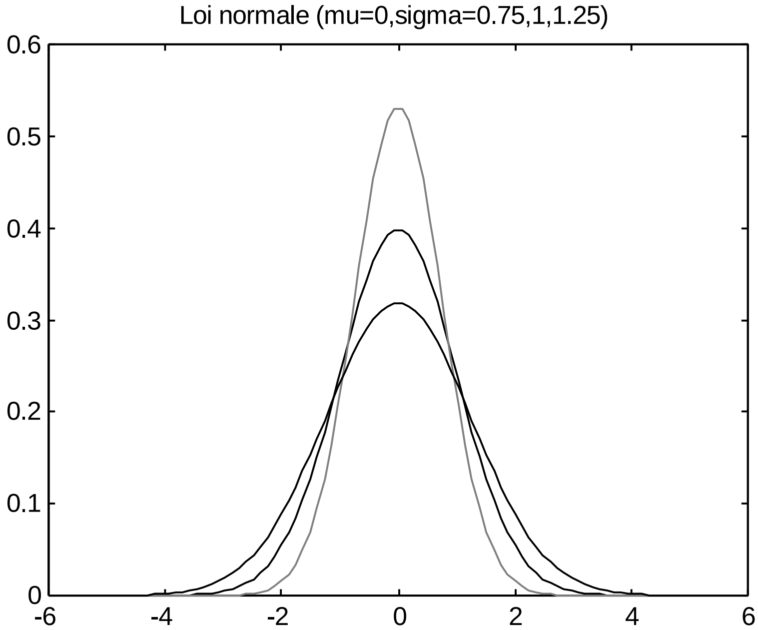
3.2. Loi normale

Pierre Simon Laplace est né à Beaumont-en-Auge en Normandie le 23 Mars 1749. Il est mort à Paris le 5 Mars 1827.

Johann Carl Friedrich Gauss est né le 30 Avril 1777 à Brunswick (Allemagne). Il est mort le 23 Février 1855 à Göttingen, Hanovre.

Cette loi est définie par sa densité de probabilité de la façon suivante :

$$\boxed{\begin{array}{l} f(g) = \dfrac{1}{\sigma.\sqrt{2.\pi}} e^{-\frac{(g-\mu)^2}{2.\sigma^2}} \\ E(G) = \mu \\ Var(G) = \sigma^2 \end{array}}$$

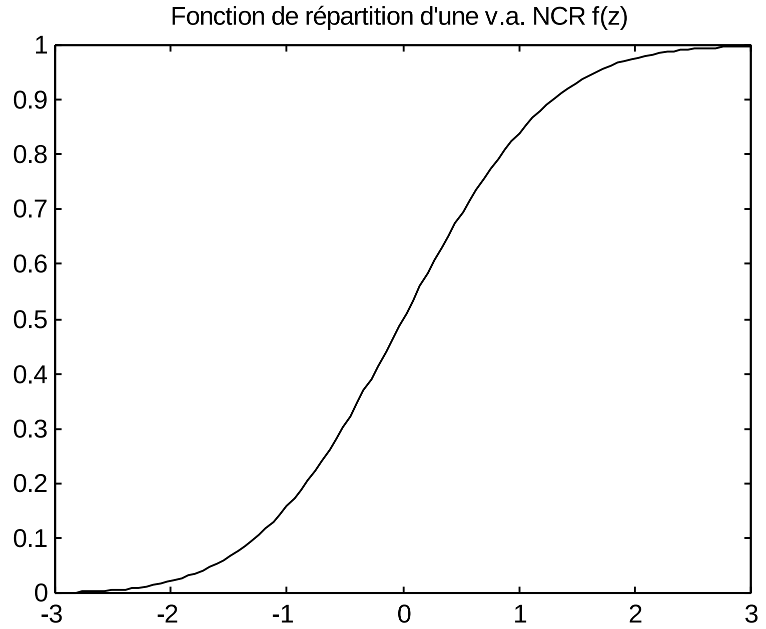


La variable centrée réduite $Z = \dfrac{(G-\mu)}{\sigma}$ a les propriétés suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{l} f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2.\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \\ E(Z) = 0 \\ Var(Z) = 1 \end{array}}$$

La fonction de répartition d'une loi normale n'est exprimable analytiquement. On utilise pour les calculs, un tableau de valeurs comme celui ci-dessous. La fonction erf(z) utilisée en traitement du signal peut également être employée :

$$\boxed{F(z) = \frac{1}{2}[1+.\mathrm{erf}(\frac{z}{\sqrt{2}})] = \frac{1}{\sqrt{2.\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{u^2}{2}}.du}$$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	50,00%	50,40%	50,80%	51,20%	51,60%	51,99%	52,39%	52,79%	53,19%	53,59%
0,1	53,98%	54,38%	54,78%	55,17%	55,57%	55,96%	56,36%	56,75%	57,14%	57,53%
0,2	57,93%	58,32%	58,71%	59,10%	59,48%	59,87%	60,26%	60,64%	61,03%	61,41%
0,3	61,79%	62,17%	62,55%	62,93%	63,31%	63,68%	64,06%	64,43%	64,80%	65,17%
0,4	65,54%	65,91%	66,28%	66,64%	67,00%	67,36%	67,72%	68,08%	68,44%	68,79%
0,5	69,15%	69,50%	69,85%	70,19%	70,54%	70,88%	71,23%	71,57%	71,90%	72,24%
0,6	72,57%	72,91%	73,24%	73,57%	73,89%	74,22%	74,54%	74,86%	75,17%	75,49%
0,7	75,80%	76,11%	76,42%	76,73%	77,04%	77,34%	77,64%	77,94%	78,23%	78,52%
0,8	78,81%	79,10%	79,39%	79,67%	79,95%	80,23%	80,51%	80,78%	81,06%	81,33%
0,9	81,59%	81,86%	82,12%	82,38%	82,64%	82,89%	83,15%	83,40%	83,65%	83,89%
1	84,13%	84,38%	84,61%	84,85%	85,08%	85,31%	85,54%	85,77%	85,99%	86,21%
1,1	86,43%	86,65%	86,86%	87,08%	87,29%	87,49%	87,70%	87,90%	88,10%	88,30%
1,2	88,49%	88,69%	88,88%	89,07%	89,25%	89,44%	89,62%	89,80%	89,97%	90,15%
1,3	90,32%	90,49%	90,66%	90,82%	90,99%	91,15%	91,31%	91,47%	91,62%	91,77%
1,4	91,92%	92,07%	92,22%	92,36%	92,51%	92,65%	92,79%	92,92%	93,06%	93,19%
1,5	93,32%	93,45%	93,57%	93,70%	93,82%	93,94%	94,06%	94,18%	94,29%	94,41%
1,6	94,52%	94,63%	94,74%	94,84%	94,95%	95,05%	95,15%	95,25%	95,35%	95,45%
1,7	95,54%	95,64%	95,73%	95,82%	95,91%	95,99%	96,08%	96,16%	96,25%	96,33%
1,8	96,41%	96,49%	96,56%	96,64%	96,71%	96,78%	96,86%	96,93%	96,99%	97,06%
1,9	97,13%	97,19%	97,26%	97,32%	97,38%	97,44%	97,50%	97,56%	97,61%	97,67%
2	97,72%	97,78%	97,83%	97,88%	97,93%	97,98%	98,03%	98,08%	98,12%	98,17%
2,1	98,21%	98,26%	98,30%	98,34%	98,38%	98,42%	98,46%	98,50%	98,54%	98,57%
2,2	98,61%	98,64%	98,68%	98,71%	98,75%	98,78%	98,81%	98,84%	98,87%	98,90%
2,3	98,93%	98,96%	98,98%	99,01%	99,04%	99,06%	99,09%	99,11%	99,13%	99,16%
2,4	99,18%	99,20%	99,22%	99,25%	99,27%	99,29%	99,31%	99,32%	99,34%	99,36%
2,5	99,38%	99,40%	99,41%	99,43%	99,45%	99,46%	99,48%	99,49%	99,51%	99,52%
2,6	99,53%	99,55%	99,56%	99,57%	99,59%	99,60%	99,61%	99,62%	99,63%	99,64%
2,7	99,65%	99,66%	99,67%	99,68%	99,69%	99,70%	99,71%	99,72%	99,73%	99,74%
2,8	99,74%	99,75%	99,76%	99,77%	99,77%	99,78%	99,79%	99,79%	99,80%	99,81%
2,9	99,81%	99,82%	99,82%	99,83%	99,84%	99,84%	99,85%	99,85%	99,86%	99,86%
3	99,87%	99,87%	99,87%	99,88%	99,88%	99,89%	99,89%	99,89%	99,90%	99,90%

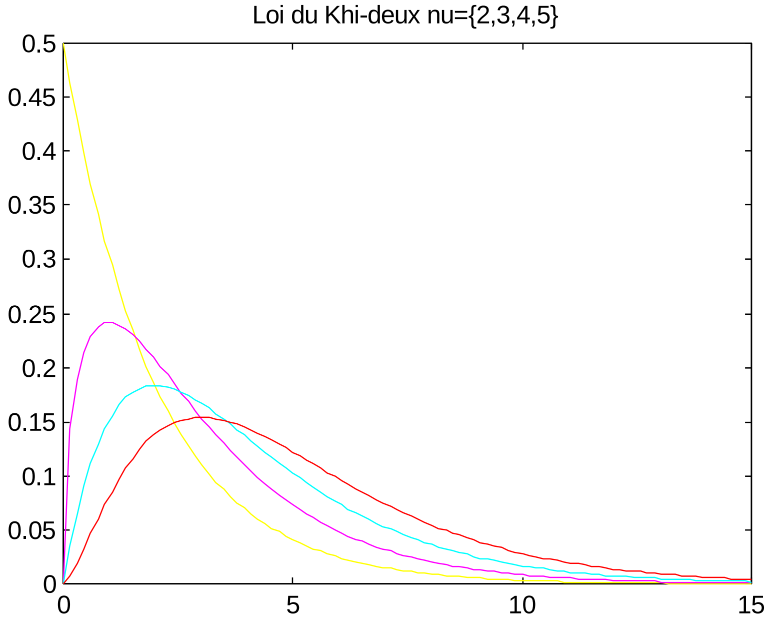
3.3. Loi du khi-deux

La variable aléatoire du khi-deux à ν degrés de liberté, est définie comme la somme des carrés de ν v.a. normales centrées réduites indépendantes :

$$\boxed{\chi^2 = \sum_{i=1}^{\nu} Z_i^2}$$

On peut démontrer alors que :

$$\boxed{\begin{aligned} f(\chi^2) &= \frac{(\chi^2)^{\frac{\nu}{2}-1}.e^{-\frac{\chi^2}{2}}}{2^{\frac{\nu}{2}}.\Gamma(\frac{\nu}{2})} \\ E(\chi^2) &= \nu \\ Var(\chi^2) &= 2.\nu \end{aligned}}$$



Cette loi est également tabulée, la valeur de khi-deux telle que $\Pr ob(\chi^2 > x) = \alpha$ est donnée dans le tableau suivant :

v \ alpha	30%	20%	15%	10%	5%	2%	1%
1	1,0742	1,6424	2,0722	2,7055	3,8415	5,4119	6,6349
2	2,4079	3,2189	3,7942	4,6052	5,9915	7,8241	9,2104
3	3,6649	4,6416	5,3170	6,2514	7,8147	9,8374	11,3449
4	4,8784	5,9886	6,7449	7,7794	9,4877	11,6678	13,2767
5	6,0644	7,2893	8,1152	9,2363	11,0705	13,3882	15,0863
6	7,2311	8,5581	9,4461	10,6446	12,5916	15,0332	16,8119
7	8,3834	9,8032	10,7479	12,0170	14,0671	16,6224	18,4753
8	9,5245	11,0301	12,0271	13,3616	15,5073	18,1682	20,0902
9	10,6564	12,2421	13,2880	14,6837	16,9190	19,6790	21,6660
10	11,7807	13,4420	14,5339	15,9872	18,3070	21,1608	23,2093
11	12,8987	14,6314	15,7671	17,2750	19,6752	22,6179	24,7250
12	14,0111	15,8120	16,9893	18,5493	21,0261	24,0539	26,2170
13	15,1187	16,9848	18,2020	19,8119	22,3620	25,4715	27,6882
14	16,2221	18,1508	19,4062	21,0641	23,6848	26,8727	29,1412
15	17,3217	19,3107	20,6030	22,3071	24,9958	28,2595	30,5780
16	18,4179	20,4651	21,7931	23,5418	26,2962	29,6332	31,9999
17	19,5110	21,6146	22,9770	24,7690	27,5871	30,9950	33,4087
18	20,6014	22,7595	24,1555	25,9894	28,8693	32,3462	34,8052
19	21,6891	23,9004	25,3289	27,2036	30,1435	33,6874	36,1908
20	22,7745	25,0375	26,4976	28,4120	31,4104	35,0196	37,5663
21	23,8578	26,1711	27,6620	29,6151	32,6706	36,3434	38,9322
22	24,9390	27,3015	28,8224	30,8133	33,9245	37,6595	40,2894
23	26,0184	28,4288	29,9792	32,0069	35,1725	38,9683	41,6383
24	27,0960	29,5533	31,1325	33,1962	36,4150	40,2703	42,9798
25	28,1719	30,6752	32,2825	34,3816	37,6525	41,5660	44,3140
26	29,2463	31,7946	33,4295	35,5632	38,8851	42,8558	45,6416
27	30,3193	32,9117	34,5736	36,7412	40,1133	44,1399	46,9628
28	31,3909	34,0266	35,7150	37,9159	41,3372	45,4188	48,2782
29	32,4612	35,1394	36,8538	39,0875	42,5569	46,6926	49,5878
30	33,5302	36,2502	37,9902	40,2560	43,7730	47,9618	50,8922

Pour les valeurs de ν comprises entre 30 et 100, la variable $y = \sqrt{2.\chi^2} - \sqrt{2.\nu - 1}$ suit une loi normale centrée réduite. Pour ν supérieur à 100, il suffit d'appliquer le théorème central-limit.

3.4. Théorème Central-Limit

Soit une suite (X_i) de v.a. indépendantes de même loi de distribution, avec $E(X) = \mu$ et $Var(X) = \sigma_X^2$

La v.a. $Y = \dfrac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu_X)}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{N}}}$ converge vers une **v.a. normale centrée réduite** quand $N \to +\infty$.

On peut écrire Y de la façon suivante :

$$\boxed{Y = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu_X)}{\sigma_X.\sqrt{N}}}$$

3.5. Approximations

En utilisant le théorème précédant pour un échantillon de n éléments. Quand $n \to +\infty$, on a :

Loi Binomiale (n, p)		Loi Normale $(n.p, \sqrt{n.p.q})$
$\Pr ob(B=b) = C_n^b.p^b.q^{n-b}$ $E(B) = n.p$ $Var(B) = n.p.q$	$n.p.q > 10$	
Loi de Poisson (λ)		Loi Normale $(\lambda, \sqrt{\lambda})$
$\Pr ob(P=p) = e^{-\lambda}.\dfrac{\lambda^p}{p!}$ $E(P) = \lambda$ $Var(P) = \lambda$	$\lambda > 30$	

4. Exercices

4.1. Automobilistes *

Une enquête statistique portant sur 10000 automobilistes débutants a révélé que 10 d'entre eux avaient provoqué un accident mortel dans leur première année de conduite. On choisit 100 débutants au hasard, et on désigne par X le nombre d'entre eux ont provoqué un accident mortel dans leur première année de conduite.

a) A l'aide de quelle loi de probabilité peut-on étudier X ?
b) Calculer Prob(X = 0) et Prob(X = 2).

4.2. Bibliothèque *

Dans une bibliothèque se trouvent 10 livres en langues étrangères : 5 en anglais, 2 en allemand et 3 en russe. On prélève au hasard 5 de ces livres. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

a) 3 livres sont en anglais , 2 en russe.
b) 3 livres sont dans une langue et deux dans une autre.
c) Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage associe le nombre de volumes en russe prélevés. Déterminer la loi de probabilité et l'espérance de X.

4.3. Les lapins **

En général, un couple de lapins met au monde une portée de neuf lapereaux, comprenant deux lapereaux noirs, trois blancs et quatre tachetés. On suppose que six lapereaux s'échappent et que chaque lapereau a la même envie de prendre la clef des champs. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque groupe de six lapereaux échappés associe le nombre de lapereaux blancs qui en font partie.

a) Déterminer la loi de probabilité de X et définir sa fonction de répartition.
b) Calculer l'espérance de X, sa variance.

4.4. Le sang *

Le sang humain possède la caractéristique appelée facteur rhésus. Pour chacun des deux sexes la probabilité pour qu'un français soit R+ est de 85 % et de 15 % pour R-.

a) La formation des couples est indépendante du facteur rhésus. Calculer la probabilité de chaque cas possible.
b) Pour les couples où l'homme est R+ et la femme R-, 8 % des naissances nécessitent un traitement spécial du nouveau né. Déterminer la probabilité p pour qu'un enfant né de parents français doive subir ce traitement.
c) Dans une maternité, il y a en moyenne 20 naissances par semaine. Quelle est la probabilité d'avoir k nouveau-nés devant subir le traitement? A.N. k = 0 et k = 1.
d) Un enfant né a subit le traitement. Quelle est la probabilité pour qu'un second enfant né dans la même semaine, ait également à subir le traitement spécial ?

4.5. Tirages ***

Une urne contient 3 boules numérotées 1, 2, 3. On effectue une suite de 100 tirages indépendants avec remise. On note X_i le numéro de la boule tirée lors du $i^{ème}$ tirage. Soit $S = \sum_{i=1}^{100} X_i$, indiquer le plus petit nombre s que l'on peut trouver tel que : $\Pr ob[200 - s \le S \le 200 + s] \ge 90\%$

a) Au moyen de l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev.
b) Au moyen du théorème de la limite centrale.

4.6. Téléphone ***

Dans une société, les employés d'un bâtiment A ont souvent besoin d'appeler au téléphone un bâtiment B. Le bâtiment A a 300 employés et on constate qu'aux heures d'affluence chacun d'entre eux veut téléphoner en moyenne 3 minutes par heures au bâtiment B. Quel nombre minimum de lignes téléphoniques faut-il établir entre A et B pour qu'un employé de A ait une probabilité inférieure ou égale à 2.5 % de ne pas avoir une ligne à sa disposition. On effectuera une approximation par une loi normale.

Chapitre IV AJUSTEMENTS ET ESTIMATIONS

1. Généralités

Ce chapitre fait appel à tous les résultats obtenus précédemment.
Nous étudierons dans un premier temps les ajustements, c'est à dire les méthodes permettant de vérifier qu'une population d'un univers aléatoire donné a les mêmes propriétés qu'un modèle de distribution. C'est à partir de là que nous pourrons prédire le comportement de cette population.
La seconde partie traite du problème de trouver la meilleure façon de calculer les paramètres du modèle à partir des valeurs de l'échantillon.

2. Ajustements

2.1. Fréquences et probabilités

Lorsque l'on cherche à **caractériser** un événement aléatoire à l'aide d'un échantillon de N valeurs, on **assimile** la fréquence observée de cet événement à sa probabilité. En effet la fréquence est le rapport entre l'effectif observé pour une classe donnée et l'effectif total, alors que la probabilité est le rapport entre le nombre de cas favorable à l'événement donné et le nombre de cas total.
Cette approximation est d'autant **meilleure** que l'échantillon est important, mais on ne pourra **jamais** en déduire une égalité entre fréquence et probabilité.

2.2. Variables statistiques et variables aléatoires

En faisant le rapprochement précédant, on en vient tout naturellement à faire la même assimilation entre les valeurs de la variable statistique observée et les valeurs de la v.a..

2.3. Ajustements d'une loi de distribution statistique à une loi de probabilité

En faisant le relevé des fréquences observées de notre variable statistique, on essaie rechercher la loi de probabilité qui soit la plus proche. Lorsque l'on désire vérifier une hypothèse donnée, on a le choix entre les méthodes graphiques et les méthodes numériques.

2.4. Droite de Henri

Pour vérifier l'ajustement d'une observation à la loi **Normale**, on peut tracer la courbe de fréquence cumulée sur du papier Gausso-Arithmétique. Si la courbe obtenue se rapproche d'une droite l'ajustement est possible.
Le paramètre μ est trouvé à l'intersection de l'axe des x et de la valeur cumulée **50 %**. En faisant la différence des intersections de l'axe des x et des valeurs cumulées **15.9 %** et **84.1 %**, on trouve deux fois la valeur du paramètre σ.

2.5. Test du khi-deux

Le test du khi-deux est un test purement numérique et bien plus précis que les vérifications graphiques. Il est valable pour n'importe quelle loi de distribution. Il suffit de calculer la valeur suivante :

$$\boxed{\chi^2 = \sum_{i=1}^{Nc} \frac{(n_i - N.p_i)^2}{N.p_i}}$$

- n_i est l'effectif observé pour une classe donnée. Afin que le test soit efficace, n_i doit être supérieur à 5 % de N. On peut faire des regroupements des classes extrêmes pour vérifier cette contrainte.
- p_i est la valeur théorique de la probabilité pour la classe donnée.
- Nc est le nombre de classes utilisées pour le test.

Karl Pearson est né le 27 Mars 1857 à Londres. Il est mort le 27 Avril 1936.

K. Pearson a démontré que cette valeur suit une loi du khi-deux à :
- Nc - 1 degrés de liberté si l'on connaît tous les paramètres de la loi de probabilité que l'on cherche à ajuster.
- Nc -1 - k degrés de liberté s'il a fallut estimer k paramètres de cette loi.

En fixant un seuil α de possibilités d'échec du test, on peut conclure favorablement lorsque la valeur calculée est inférieure la valeur limite χ^2_{max} telle que $F(\chi^2_{max}) = 1 - \alpha$.

Exemple :
On a lancé 200 fois une pièce et on a relevé 115 fois la face pile. La pièce est elle truquée ? Vérifier cela par un test du khi-deux au seuil 5 % puis 1 %. Conclusions.

La loi théorique que l'on va chercher à ajuster est simplement : Prob(face) = Prob(pile) = 0.5.

Calculons donc la valeur de $\chi^2 = \frac{(115-200.0{,}5)^2}{200.0{,}5} + \frac{(85-200.0{,}5)^2}{200.0{,}5} = 4.5$.

On regarde dans une table de la loi du khi-deux à (2 -1) degrés de liberté, la valeur limite χ^2_{max} pour un seuil de 5 % est 3.8415. Dans ce cas là, le test est **négatif**. La pièce est peut-être truquée.
Pour un seuil de 1 % d'erreur, on trouve $\chi^2_{max} = 6.6349$. Le test est cette fois **positif**. On ne peut donc pas conclure avec certitude que la pièce est truquée dans ce cas puisque la marge d'erreur est plus faible !!!

3. Estimations

Lorsque l'on cherche à déterminer un paramètre d'une population P inconnue, on mesure la variable X sur un échantillon de N valeurs. On estime le paramètre **a** de la population par la valeur **Â**, calculée à partir des N échantillons.
Â est un estimateur sans biais si E(Â) = a.
Il converge en moyenne quadratique vers a, lorsque Var(Â) tend vers 0 quand N tend vers l'infini.

3.1. Moyenne d'un échantillon

L'estimation de la moyenne μ de la population P se fait en calculant $\hat{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$. En effet :

$$\boxed{E(\hat{X}) = E\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\right] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E(x_i) = \frac{N.\mu}{N} = \mu}$$

La variance est :

$$\boxed{Var(\hat{X}) = \frac{1}{N^2} Var\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} Var(x_i) = \frac{N.\sigma^2}{N^2} = \frac{\sigma^2}{N}}$$

$\hat{X}$ est un estimateur **sans biais** de μ et converge en moyenne quadratique.

3.2. Variance d'un échantillon

Si on estime la variance σ^2 de la population P par $\hat{S}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \hat{X})^2$, on trouve :

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \hat{X} + \hat{X} - \mu\right)^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \hat{X}\right)^2 + \sum_{i=1}^{N}\left(\hat{X}-\mu\right)^2 - 2.(\hat{X}-\mu).\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \hat{X}\right)$$

Comme $\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \hat{X}\right) = 0$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \hat{X}\right)^2 + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\hat{X}-\mu\right)^2$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \hat{X}\right)^2 + \frac{N.\left(\hat{X}-\mu\right)^2}{N} = \hat{S}^2 + \left(\hat{X}-\mu\right)$$

Soit encore :

$$E(\hat{S}^2) = \frac{1}{N}E\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2\right] - E\left[(\hat{X}-\mu)^2\right] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Var(x_i) - Var(\hat{X})$$

$$E(\hat{S}^2) = \frac{N.\sigma^2}{N} - \frac{\sigma^2}{N} = \frac{N-1}{N}.\sigma^2$$

On peut montrer également que :

$$\mathrm{Var}(\hat{S}^2) = \frac{2.(N-1).\sigma^4}{N^2}$$

$\hat{S}^2$ est un estimateur biaisé de σ^2 et converge en moyenne quadratique.
La **meilleure** estimation de la variance est donc :

$$\boxed{\hat{S}_*^2 = \frac{N}{N-1}.\hat{S}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \hat{X})^2}$$

3.3. Test de Student

Etant donné deux échantillons de taille N_1 et N_2 pris dans des populations quelconques, et en estimant leur moyenne par $\overline{X}_1$ et $\overline{X}_2$, le test de Student propose de vérifier que ces deux échantillons ont bien la **même** moyenne.
On peut montrer que la variable T suit une loi de Student à $N_1 + N_2 - 2$ degrés de liberté :

$$\boxed{T = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right)}{\sqrt{\frac{N_1+N_2}{N_1.N_2}.(N_1.S_1^2 + N_2.S_2^2)}}.\sqrt{N_1+N_2-2}}$$

Si la valeur T est inférieure à la valeur limite T_{max} fixée par le seuil α tel que $F(T_{max}) = 1-\alpha$, on peut conclure que les moyennes des deux échantillons sont égales.

3.4. Test de Snedecor

GEORGE W. SNEDECOR (1881-1974).

Ce test permet de vérifier **l'égalité** des variances de deux échantillons Gaussiens (loi normale).
La variable F suit une loi de Fisher-Snedecor à $N_1 - 1$ et $N_2 - 1$ degrés de liberté :

$$\boxed{F = \frac{\frac{N_1.S_1^2}{N_1-1}}{\frac{N_2.S_2^2}{N_2-1}}}$$

Si la valeur F est inférieure à la valeur limite F_{max} fixée par le seuil α tel que $F(F_{max}) = 1-\alpha$, on peut conclure que les variances des deux échantillons sont **égales**.

4. Exercices d'ajustements

4.1. Lingots d'or **

Un technicien a mesuré le poids des lingots d'acier à la sortie du four.

Poids des lingots (Kg)	152 à 154	154 à 156	156 à 158	158 à 160	160 à 162	162 à 164	164 à 166	166 à 168	168 à 170	170 à 172
Effectif	3	5	12	18	24	30	24	18	10	4

a) Tracer la droite de HENRY de cette statistique.
b) Estimer la moyenne et l'écart-type graphiquement.
c) Vérifier numériquement ces valeurs.
d) Faire un test du khi-deux au seuil 5 % pour vérifier que le poids des lingots suit une loi normale.

4.2. Avions *

La durée des vols en caravelle d'AIR-France Paris-Alger a été mesurée et rassemblée dans le tableau suivant :

Durée (heures)	1,9 à 1,95	1,95 à 2	2 à 2,05	2,05 à 2,1	2,1 à 2,15	2,15 à 2,2	2,2 à 2,25
Nombre	19	19	39	48	87	94	104
Durée (heures)	2,25 à 2,3	2,3 à 2,35	2,35 à 2,4	2,4 à 2,45	2,45 à 2,5	2,5 à 2,55	
Nombre	92	57	44	28	26	13	

a) Quel semble être la loi de probabilité ?
b) Estimer la moyenne et l'écart-type.
c) Faire un test du khi-deux au seuil 5 %.

4.3. Magasin d'outils *

Pendant 100 intervalles de 10 minutes, on a compté le nombre X d'ouvriers se présentant à un magasin pour emprunter des outils. Vérifier le caractère Poisonnien de la loi de X par un test du khi-deux (ne pas oublier de rassembler les classes extrêmes).

X	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	>25
Effectif	1	0	1	2	1	3	5	6	9	10	11	12	8	9	7	5	4	3	1	1	1	0

5. Exercices d'estimations

5.1. Pièces mécaniques *

On mesure les diamètres de pièces mécaniques dans un lot important fabriqué par une même machine. Les valeurs observées suivent une loi normale de moyenne 10.06 mm et d'écart-type 0.18 mm. Si l'on prélève au hasard dans ce lot 9 pièces, quelle est la probabilité pour que le diamètre moyen de cet échantillon soit :

a) Inférieur à 10 mm ?
b) Supérieur à 10.15 mm ?

5.2. Machine *

Une machine automatique remplit des paquets. Les poids en gramme sur un échantillon de 10 paquets sont :
297 ;300 ;295 ;297 ;300 ;310 ;300 ;295 ;310 ;300.

a) Calculer le poids moyen de l'échantillon et son écart-type.
b) Donner une estimation de l'écart-type de la population.

5.3. Loi normale *

Soit X une v.a. qui suit une loi normale d'écart-type 0.31 et de moyenne m inconnue. On prend un échantillon de 100 valeurs de moyenne . Trouver un intervalle contenant m avec une confiance de 95 %.

5.4. Œufs frais *

Soit p le pourcentage d'œufs frais dans la livraison hebdomadaire d'un supermarché. Dans un échantillon de 100 œufs on a constaté que 76 d'entre eux possédaient cette qualité. En déduire l'intervalle de confiance de p à 98 %.

5.5. Billes d'acier **

Dans un contrôle journalier effectué à la sortie d'une chaîne de fabrication de billes d'acier, sur un échantillon de 900 billes il ressort que leur poids suit une loi normale de moyenne 62.33 mg et d'écart-type 6.54 mg.

a) Estimer l'écart-type théorique de la production journalière.
b) Estimer le poids moyen journalier au sein de la production par un intervalle de confiance symétrique au niveau 95%.
c) Quel devrait être la taille de l'échantillon pour situer le poids moyen dans un intervalle symétrique de ±4 mg avec une sécurité de 95% ?
d) Dans quelle proportion doit évoluer la taille de l'échantillon, si l'on veut un intervalle symétrique deux fois plus petit ?
e) On dispose d'un lot de 10 billes dont les poids sont en mg : 70 ;61 ;69 ;67 ;60 ;63 ;63 ;66 ;64 ;73. Peut-on considérer ce lot comme extrait au hasard de la production journalière de l'usine au niveau de confiance 95% ?

Chapitre V
FILES D'ATTENTE

1. Généralités

Un phénomène d'attente peut-être représenté comme un nombre aléatoire de « ***clients*** » arrivant devant un nombre k de « ***guichets*** » où ils resteront pendant une durée aléatoire. Les clients sont patients et respectent leur ordre d'arrivée (file FCFS : First Come First Served). La file d'attente est commune à tous les guichets qui sont **équivalents**.

1.1. Processus de naissance et de mort

On défini ce processus comme une chaîne de Markov dans laquelle, on passe d'un état n à l'état n + 1 avec la probabilité λ_n.dt (processus de naissance) et de l'état n à l'état n - 1 avec la probabilité μ_n.dt (processus de mort).

$$\operatorname{Prob}_{\overline{\text{Vie}(n)}\cap\overline{\text{Mort}(n)}}(dt) = (1-\lambda_n.dt).(1-\mu_n.dt) \approx 1-(\mu_n+\lambda_n).dt$$

$$\operatorname{Prob}_{\overline{\text{Vie}(n)}\cap\text{Mort}(n)}(dt) = (1-\lambda_n.dt).\mu_n.dt \approx \mu_n.dt$$

$$\operatorname{Prob}_{\text{Vie}(n)\cap\overline{\text{Mort}(n)}}(dt) = \lambda_n.dt.(1-\mu_n.dt) \approx \lambda_n.dt$$

$$\operatorname{Prob}_{\text{Vie}(n)\cap\text{Mort}(n)}(dt) = \lambda_n.dt.\mu_n.dt \approx 0$$

A l'instant t + dt pour n = 0, on aura :

$$\operatorname{Prob}(t+dt) = \operatorname{Prob}_{\overline{\text{Vie}(0)}\cap\overline{\text{Mort}(0)}}(dt).\operatorname{Prob}_0(t) + \operatorname{Prob}_{\overline{\text{Vie}(1)}\cap\text{Mort}(1)}(dt).\operatorname{Prob}_1(dt)$$

$$\operatorname{Prob}_0(t+dt) = (1-\lambda_0.dt).\operatorname{Prob}_0(t) + \mu_1.dt.\operatorname{Prob}_1(t)$$

De même pour n > 0 :

$$\operatorname{Prob}_n(t+dt) = \operatorname{Prob}_{\overline{\text{Vie}(n)}\cap\overline{\text{Mort}(n)}}(dt).\operatorname{Prob}_n(t) + \operatorname{Prob}_{\text{Vie}(n-1)\cap\overline{\text{Mort}(n-1)}}(dt).\operatorname{Prob}_{n-1}(t)$$

$$+ \operatorname{Prob}_{\overline{\text{Vie}(n+1)}\cap\text{Mort}(n+1)}(dt).\operatorname{Prob}_{n+1}(t)$$

$$\operatorname{Prob}_n(t+dt) = (1-(\mu_n+\lambda_n).dt).\operatorname{Prob}_n(t) + \lambda_{n-1}.dt.\operatorname{Prob}_{n-1}(t) + \mu_{n+1}.dt.\operatorname{Prob}_{n+1}(t)$$

En régime permanent, les probabilités ne sont plus fonction du temps :

$$P_0 = (1-\lambda_0).P_0 + \mu_1.P_1 \Rightarrow \lambda_0.P_0 = \mu_1.P_1$$

$$P_n = (1-(\mu_n+\lambda_n).dt).P_n + \lambda_{n-1}.dt.P_{n-1} + \mu_{n+1}.dt.P_{n+1}$$

$$\mu_{n+1}.P_{n+1} = (\mu_n+\lambda_n).P_n - \lambda_{n-1}.P_{n-1}$$

$$\Rightarrow P_{n+1} = \frac{\prod_{i=0}^{n}\lambda_i}{\prod_{i=0}^{n}\mu_{i+1}}.P_0 = \prod_{i=0}^{n}\rho_i.P_0$$

P_0 est obtenu par normalisation $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$.

2. Files à processus Markoviens

Les arrivées suivent un processus de Poisson de paramètre α. La probabilité de voir un nouveau client arriver pendant la durée dt (cf. **ch. III §1.5.2**) : $\operatorname{Prob}_1(dt) = \alpha.dt$

La durée de service τ suit une loi Exponentielle de paramètre β : $\gamma_1(\beta,\tau) = \beta.e^{-\beta.\tau}$.

On va poser $\rho = \dfrac{\alpha}{\beta}$ (mesure du trafic en Erlangs).

Il est nécessaire que $\rho < k$ pour ne pas voir la file d'attente s'allonger indéfiniment. On appelle la charge du système, la valeur du trafic par guichet : $C = \dfrac{\rho}{k} < 1$.

On va définir les v.a. suivantes :
N est la v.a. égale au nombre de clients dans le système.
O est la v.a. égale au nombre de guichets occupés.
I est la v.a. égale au nombre de guichets inoccupés.
F est la v.a. égale au nombre de clients dans la file d'attente.
On a donc :
N = F + O   k = I + O
F = 0 si $N \le k$ I = 0 si $N \ge k$
Le temps de réponse Tr de la file d'attente est donnée par la **formule de Little** pour un système en **équilibre** où il y a N clients en moyenne et où le taux moyen d'arrivées est λ : $Tr = \dfrac{N}{\lambda}$.
Le temps de réponse est la somme du temps d'attente Ta et du temps de service Ts.

2.1. Cas d'un seul guichet : k = 1

Soit Nd, le nombre de départ à l'instant dt et Ts le temps de service :

$$\operatorname{Prob}_{Nd=1}(dt) = \operatorname{Prob}(Ts \le dt) = \int_0^{dt} \gamma_1(\beta,\tau).d\tau = \int_0^{dt} \beta.e^{-\beta.\tau}.d\tau = \left[-e^{-\beta.\tau}\right]_0^{dt} = 1 - e^{-\beta.dt} \approx \beta.dt$$

On obtient alors pour $i \ge 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_i = \alpha \\ \mu_{i+1} = \beta \\ \rho_i = \rho \end{array}\right\} \Rightarrow \quad P_n = \prod_{i=0}^{n-1} \rho.P_0 = \rho^n.P_0$$

On trouve la valeur de P_0 en écrivant que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n.P_0 = \frac{1}{1-\rho}.P_0 \Rightarrow P_0 = 1-\rho$

$$E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} n.P_n = \sum_{n=0}^{\infty} n.\rho^n.P_0 = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}.P_0 = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$E(F) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1).P_n = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1).\rho^n.P_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n.\rho^{n+1}.P_0 = \frac{\rho^2}{(1-\rho)^2}.P_0 = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$E(I) = \sum_{n=0}^{1} (1-n).P_n = P_0 = 1-\rho$$

$$E(Tr) = \frac{E(N)}{\alpha} = \frac{1}{\beta-\alpha}$$

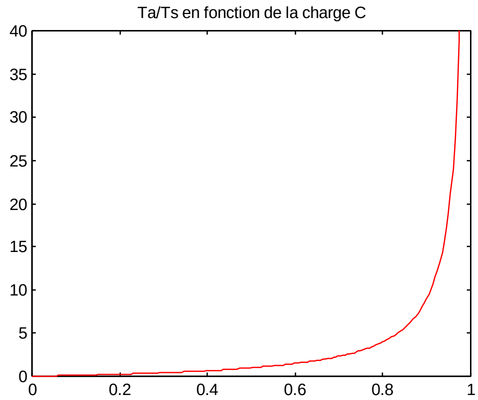
Le **temps de service moyen** est l'espérance d'une loi $\gamma_1(\beta,\tau)=\beta.e^{-\beta.\tau}$:

$$E(Ts)=\int_0^\infty \tau.\gamma_1(\beta,\tau).d\tau=\int_0^\infty \beta.\tau.e^{-\beta.\tau}.d\tau=\left[-\tau.e^{-\beta.\tau}\right]_0^\infty-\int_0^\infty -e^{-\beta.\tau}.d\tau=0-0+\left[\frac{-e^{-\beta.\tau}}{\beta}\right]_0^\infty=0+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\beta}$$

Le **temps d'attente moyen** est alors :

$$E(Ta)=E(Tr-Ts)=E(Tr)-E(Ts)=\frac{1}{\beta-\alpha}-\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta.(\beta-\alpha)}=\frac{\rho}{\beta-\alpha}=\frac{E(F)}{\alpha}$$

Le système est **efficace** pour $C\le 75\%$, car $\frac{E(Ta)}{E(Ts)}=\frac{\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{C}{1-C}\le 3$ pour $C\le 75\%$.



2.2. Cas général

On reprend le même raisonnement, mais avec une petite variante :
Si on suppose s guichets occupés, la probabilité de voir un départ après un temps dt est s fois plus **importante** que lorsqu'il y a un seul guichet (les guichets fonctionnent indépendamment les uns des autres).
On a toujours $P_1=\rho.P_0$, donc pour $n\le k$:

$$\mu_n=n.\beta\Rightarrow\rho_n=\frac{\rho}{n}\Rightarrow P_n=\prod_{i=0}^{n-1}\frac{\rho}{i}.P_0=\frac{\rho^n}{n!}.P_0$$

et pour $n>k$:

$$\mu_n=k.\beta\Rightarrow\rho_n=\frac{\rho}{k}\Rightarrow P_n=\prod_{i=k}^{n-1}\frac{\rho}{k}.P_k=\frac{\rho^{n-k}}{k^{n-k}}.P_k=\frac{\rho^n}{k!.k^{n-k}}.P_0$$

On trouve la valeur de P_0 en écrivant que :

$$\sum_{n=0}^\infty P_n=1=\sum_{n=0}^{k}\frac{\rho^n}{n!}.P_0+\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{\rho^n}{k^{n-k}.k!}.P_0=\sum_{n=0}^{k-1}\frac{\rho^n}{n!}.P_0+\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\rho^n}{k^{n-k}.k!}.P_0=\sum_{n=0}^{k-1}\frac{\rho^n}{n!}.P_0+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^{n+k}}{k^n.k!}.P_0$$

$$1=\sum_{n=0}^{k-1}\frac{\rho^n}{n!}.P_0+\frac{\rho^k.P_0}{k!}.\frac{\frac{\rho}{k}}{(1-\frac{\rho}{k})^2}=\sum_{n=0}^{k-1}\frac{\rho^n}{n!}.P_0+\frac{\rho^k.P_0}{k!}.\frac{k.\rho}{(k-\rho)^2}$$

$$P_0=\frac{1}{\sum_{n=0}^{k-1}\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^{k+1}}{(k-1)!.(k-\rho)^2}}$$

$$E(F) = \sum_{n=k+1}^{\infty}(n-k).P_n = \sum_{n=k+1}^{\infty}(n-k).\frac{\rho^n.P_0}{k^{n-k}.k!} = \sum_{n=1}^{\infty} n.\frac{\rho^{n+k}.P_0}{k^n.k!} = \frac{\rho^k.P_0}{k!}.\frac{\frac{\rho}{k}}{(1-\frac{\rho}{k})^2}$$

$$E(F) = \frac{\rho^{k+1}.P_0}{(k-1)!.(k-\rho)^2}$$

$$E(I) = \sum_{n=0}^{k}(k-n).P_n = k.\sum_{n=0}^{k}\frac{\rho^n.P_0}{n!} - \sum_{n=0}^{k}\frac{n.\rho^n.P_0}{n!} = k.\sum_{n=0}^{k}\frac{\rho^n.P_0}{n!} - \sum_{n=1}^{k}\frac{\rho^n.P_0}{(n-1)!}$$

$$E(I) = (k-\rho).\sum_{n=0}^{k-1}\frac{\rho^n.P_0}{n!} + \frac{\rho^k.P_0}{(k-1)!} = (k-\rho).\sum_{n=0}^{k-1}\frac{\rho^n.P_0}{n!} + (1-\sum_{n=0}^{k-1}\frac{\rho^n.P_0}{n!}).(k-\rho)$$

$$E(I) = k-\rho$$

$$E(N) = E(F+k-I) = E(F)+k-E(I) = \frac{\rho^{k+1}.P_0}{(k-1)!.(k-\rho)^2} + \rho$$

$$E(Tr) = \frac{E(N)}{\alpha} = \frac{1}{\beta}.\left[1+\frac{\rho^k.P_0}{(k-1)!.(k-\rho)^2}\right]$$

Le **temps de service moyen** est l'espérance de k loi $\gamma_1(\beta_i,\tau) = \beta_i.e^{-\beta_i.\tau}$ en parallèles avec une probabilité ai. La distribution du temps de service est une loi hyper-exponentielle :

$$H\gamma(\tau) = \sum_{i=1}^{k} a_i.\beta_i.e^{-\beta_i.\tau}$$

$$E(Ts) = \int_0^{\infty}\tau.H\gamma(\tau).d\tau = \int_0^{\infty}\tau.\sum_{i=1}^{k}a_i.\beta_i.e^{-\beta_i.\tau}.d\tau = \sum_{i=1}^{k}a_i.E[\gamma_1(\beta_i,\tau)] = \sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\beta_i} = \frac{1}{\beta}.\sum_{i=1}^{k}a_i = \frac{1}{\beta}$$

Le **temps d'attente moyen** est alors :

$$E(Ta) = E(Tr)-E(Ts) = \frac{E(N)}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta}.\left[1+\frac{\rho^k.P_0}{(k-1)!.(k-\rho)^2} - 1\right] = \frac{1}{\beta}.\frac{\rho^k.P_0}{(k-1)!.(k-\rho)^2}$$

$$\frac{E(Ta)}{E(Ts)} = \frac{\rho^k.P_0}{(k-1)!.(k-\rho)^2} = \frac{(k.C)^k.P_0}{(k-1)!.(k-k.C)^2} = \frac{k^k.P_0.C^k}{k!.(1-C)^2}$$

Le système est efficace pour $C \le 75\%$.

2.3. Modèle pour les réseaux téléphoniques

Lorsque tous les guichets sont occupés, si un client arrive il est rejeté. C'est le modèle utilisé par Erlang pour les réseaux téléphoniques (k représente le nombre de lignes de l'autocommutateur).

Dans ce cas particulier, $P_n = 0$ pour $n > k$, on a alors : $P_0 = \dfrac{1}{\sum_{n=0}^{k}\frac{\rho^n}{n!}}$

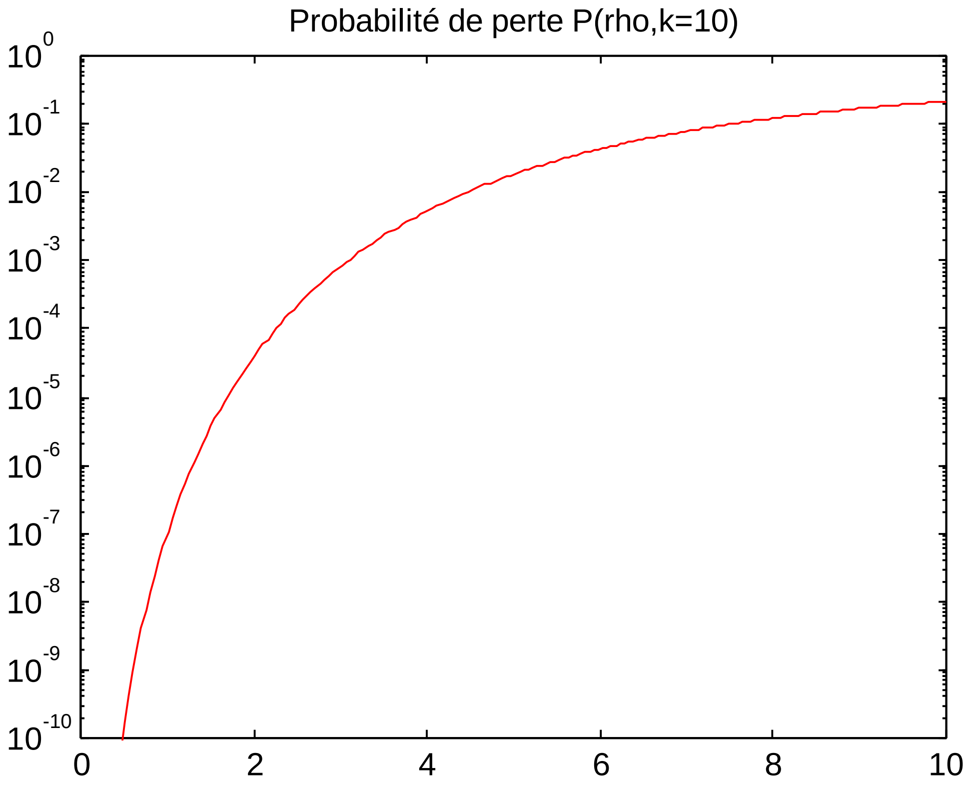
$$E(I) = \sum_{n=0}^{k}(k-n).P_n = k.\sum_{n=0}^{k}\frac{\rho^n.P_0}{n!} - \sum_{n=0}^{k}\frac{n.\rho^n.P_0}{n!} = k.\sum_{n=0}^{k}\frac{\rho^n.P_0}{n!} - \sum_{n=1}^{k}\frac{\rho^n.P_0}{(n-1)!}$$

$$E(I) = (k-\rho).\sum_{n=0}^{k-1}\frac{\rho^n.P_0}{n!} + k.P_k = (k-\rho).(1-P_k) + k.P_k = k-(1-P_k).\rho$$

$$E(N) = E(F)+k-E(I) = (1-P_k).\rho$$

La **probabilité de perte** d'un client est donnée par la formule d'Erlang :

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!}.P_0 = \frac{\rho^k}{k!.\sum_{n=0}^{k}\frac{\rho^n}{n!}}$$



99 95 90 85 80 75 70 60 50 40 30 25 20 15 10 5 1

99 95 90 85 80 75 70 60 50 40 30 25 20 15 10 5 1

Travaux Pratiques Math n° 1
Statistiques

1. Introduction :

Les TP ont été développés sous MATLAB (MATrice LABoratory). Une bibliothèque de fonctions statistiques et probabilités a été développée spécialement pour ces TP. En annexe, vous trouverez quelques rappels sur les principales fonctions MATLAB utiles...

Vous devez rendre un compte rendu (sous WORD) par binôme, en indiquant à chaque fois les fonctions MATLAB que vous avez utilisé. Essayez de condenser au maximum la place des graphiques que vous rendez, c'est à dire jamais une seule figure par page ! ! !

2. Régression linéaire

Le fichier REGRES1.MAT contient un tableau des points.

a) Charger ce fichier dans votre environnement de travail et vérifier que les variables x et y existent bien.
b) Afficher le nuage de points (x, y). Quelle semble être la relation entre x et y ?
c) Fabriquer une fonction MATLAB qui effectue tous les calculs de la régression linéaire de Y en X. Déterminer les coefficients **a, b, c, d** de la relation Y = a.X + b et X = c.Y + d.
d) Tracer les deux droites sur le même graphique que le nuage de points.
e) Comparer le produit a.c et le carré du coefficient de corrélation linéaire r. Démontrer la relation analytiquement.

3. Approximations

a) Charger le fichier REGRES2.MAT. Combien il y a-t-il de points ?
b) Calculer les coefficients de la régression linéaire de Y en X.
c) La régression $Z = Y^2$ est-elle meilleure ?
d) La régression W = log(Y) est-elle meilleure ?

Travaux Pratiques Math n° 2
Probabilités

1. V.a. discrètes : Les lois de probabilité Prob(X = x) = p(x)

a) Loi Binomiale :
   a) Quelles sont les valeurs possibles de X ?
   b) Quelle relation il y a-t-il entre la position du maximum et les valeurs de n et p ?
      (on prendra n = 10, p = 10 %, 20 %, 30 %, 40 %).
   c) Calculer Prob(B = 6) pour n = 40 et p = 10 %. Vérifier par le calcul direct.

b) Loi de Poisson :
   a) Quelles sont les valeurs possibles de X ?
   b) Quelle relation il y a-t-il entre la position du maximum et lambda ?
      (on prendra Lambda = 2, 5, 10, 20).
   c) Calculer Prob(P = 12) pour Lambda = 10. Vérifier par le calcul direct.

2. V.a. continues : Les densités de probabilité f(x)

a) Loi normale :
   a) Quelles sont les valeurs possibles de X ?
   b) Que se passe-t-il lorsque **mu** augmente en ce qui concerne le maximum et l'enveloppe ?
      (on prendra mu = -1, 0, 1 et sigma = 1 et x sur l'intervalle [-6, 6]).
   c) Que se passe-t-il lorsque sigma augmente en ce qui concerne le maximum et l'enveloppe ?
      (on prendra mu = 0 et sigma = 1, 1.5, 2 et x sur l'intervalle [-6, 6]).
   d) Calculer la densité de probabilité f(1.52) pour mu = 0 et sigma = 2. Vérifier par le calcul direct.

3. Les fonctions de répartition F(x) = Prob(X <= x)

a) Quelle est la relation entre F(x) et p(x) ?
b) Quelle est la relation entre F(x) et f(x) ?
c) Afficher la fonction de répartition de LB(20,0.4), de LP(10) et de LN(0, 1).
d) Calculer Prob(4 <= B < 10), Prob(8 <= P < 14), Prob(-1 <= N < 1).

Travaux Pratiques Math n° 3
Estimations

1. Estimation de la moyenne d'une population

a) La fonction vstat1 génère une v.a.. Est-ce une variable continue ou discontinue ?
b) Fabriquer un échantillon E de 50 valeurs. Estimer la moyenne M de cette v.a..
c) Sur 100 échantillons (repérés par l'indice i) de N = 50 valeurs, estimer la moyenne Mi.
d) Tracer la courbe Mi = f(i).

2. Estimation de la variance d'une population

a) Comparer le résultat de la fonction var(E) et de la fonction MATLAB cov(E). Expliquer.
b) Quelle est la valeur de l'estimation non biaisée de la variance de la population ?
c) L'estimateur M de la moyenne de l'échantillon E peut-être considéré comme une v.a.. Vérifier que lorsque la taille N de l'échantillon augmente, la variance de M diminue. On prendra successivement des échantillons de taille 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50.

3. Vérification de l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev

On admet que la v.a. a une espérance m de 2.5 et une variance s² de 1.25.

a) Déterminer la probabilité théorique maximum de trouver une valeur de | M - m | supérieure à alpha.m.
b) Vérifier cette inégalité pour 100 échantillons en fonction de N. On pourra calculer les 100 valeurs de l'estimateur M et faire le compte des valeurs qui vérifient la relation du a). Ensuite comparer le résultat au calcul théorique.

4. Application

Soit la nouvelle v.a. vstat2.

a) Est-elle continue ou discrète ?
b) Déterminer le nombre N de valeurs minimum de l'échantillon E pour que l'estimation M de la moyenne soit connue à 1% avec une probabilité d'erreur de 5%. On pourra faire une première estimation sur un échantillon de 100 valeurs de la moyenne et de la variance pour calculer N.
c) Estimer la moyenne et la variance.

Travaux Pratiques Math n° 4
Ajustements

1. Ajustements

a) Charger le fichier AJUST.MAT. Il contient trois échantillons, quel est le nombre de valeurs de l'échantillon x2 ?
b) Quel est le type de variable de cet échantillon ?
c) Tracer la densité de probabilité de cette v.a., sur 20 classes. Quelle est la largeur d'une classe ?
d) Quelle semble être la loi de probabilité théorique ?
e) Tracer la droite de Henri sur 20 classes. En déduire graphiquement la moyenne et la variance.
f) Vérifier ces valeurs par des estimations numériques.

2. Tests du khi-deux

Pour les échantillons x2, x3, x4 :
a) Estimer la moyenne et la variance.
b) Quel est l'effectif observé No sur 10 classes ?
c) Déterminer la loi théorique et l'effectif théorique pour chaque classe (Ne pas oublier de regrouper les valeurs des classes extrêmes !).
d) Quelle est la valeur théorique maximum du khi-deux au seuil 5 % ? Quelle est la valeur pratique ? Conclusion.

NB : Définissez le type de variable, et utilisez soit la fonction [No, delta, z, f] = dpc(x,nbclasses) pour une v.a. continue, soit [No, z, p] = lpd(x) pour une v.a. discrète.